Thème : Suites et séries

Exercice n°1 Planche BEOS 3549 Centrale PC 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que f_n ne s'annule qu'une unique fois sur $\mathbb{R}$. On note a_n ce réel.
2. Créer une fonction python $a(n)$ qui renvoie la valeur de a_n.
3. Montrer que $(a_n)_n$ est décroissante et convergente.
4. Tracer $u_n = n^2 a_n$ pour $n \in [\![10, 100]\!]$. Formuler une conjecture sur le comportement de a_n lorsque n tend vers $+\infty$?
5. En revenant à la définition de a_n, trouver un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$?
6. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?
7. Quelle est la nature, en fonction de la valeur de α,de la série de terme général $n^\alpha\left(a_n - \dfrac{2}{n^2}\right)$?
8. On définit g sur $[0, 1]$ par $g(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$.
   (a) Montrer que g est croissante sur $[a_2, 1]$.
   (b) On définit $(x_p)_p$ par $x_0 = 1$ et $x_{p+1} = g(x_p)$.
   Montrer que x_p tend vers a_2 lorsque p tend vers $+\infty$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

3) Pour la décroissance de $(a_n)_n$, comment se situe $f_{n+1}(a_n)$ par rapport à $f_n(a_n)$?

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 \geq 1$ car $n^2 \geq 1$ et $3nx^2 \geq 0$.
   f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.
   Donc, $\boxed{\text{il existe un et un seul réel } x \text{ tel que } f_n(x) = 0}$. On le note a_n.
2.
```
import scipy.optimize as resol

def a(n):
    def f(x):
        return n*x**3+n**2*x-2
    return(resol.fsolve(f,0.))
```
3. On constate que $f_n(0) = -2 \leq f_n(a_n) = 0$, or, f_n est strictement croissante, donc, $0 \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a $f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 = \underbrace{na_n^3 + n^2 a_n - 2}_{=0} + a_n^3 + (2n+1)a_n a_n^3 + (2n+1)a_n \geq 0 =$
   $f_{n+1}(a_{n+1})$ car $n \geq 1$ et $a_n \geq 0$.
   Étant donné que f_{n+1} est croissante, on obtient $a_n \geq a_{n+1}$.
   $\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc.}}$
4.
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

N=[n for n in range(10,101)]
U=[n**2*a(n) for n in N]

plt.plot(N,L)
plt.axis([-1., 5., -1., 6.])
plt.grid()
plt.show()
```
   Ceci permet de conjecturer que la limite de la suite $(na_n)_n$ est 2.

5. On remarque que $f_n(1) = n + n^2 - 2 \geq 0 = f_n(a_n)$ car $n \geq 1$. La croissance de f_n permet d'affirmer que $0 \leq an \leq 1$;

   De plus, $f_n(a_n) = 0 \iff n^2 a_n \left(1 + \dfrac{a_n^2}{n}\right) = 2$.

   Ainsi, $0 \leq \dfrac{a_n^2}{n} \leq \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, le théorème d'encadrement permet de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{n} = 0$.

   Ceci permet de dire que $n^2 a_n \left(1 + \dfrac{a_n^2}{n}\right) = 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 a_n \iff \boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}}$.

6. $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, c'est une série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$).

   Donc, par critère de l'équivalent pour les séries à termes positifs, $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$.

7. Pour tout α, on a $f_n(a_n) = 0 \iff n^\alpha \left(a_n - \dfrac{2}{n^2}\right) = -\dfrac{n^\alpha a_n^3}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{8}{n^{7-\alpha}}$.

   Or, $\sum \dfrac{1}{n^{7-\alpha}}$ est une série de Riemann convergente si et seulement si $7 - \alpha > 1 \iff \alpha < 6$.

   Donc, par critère de l'équivalent pour les séries à termes positifs, $\boxed{\sum n^\alpha \left(a_n - \dfrac{2}{n^2}\right) \text{ converge si et seulemen}}$

8. (a) a_2 est l'unique solution de l'équation $f_2(x) = 0 \iff 2x^3 + 4x - 2 = 0 \iff x^3 + 2x - 1 = 0$.

   g est dérivable sur $[a_2, 1]$, et $g'(x) = \dfrac{6x^2(3x^2+2) - (2x^3+1).6x}{(3x^2+2)^2} = \dfrac{6x^4 + 12x^2 - 6x}{(2x^3+1)^2} = 6x.\dfrac{x^3+2x-1}{(2x^3+1)^2}$

   0 puisque $f_2(x) \geq 0$ pour $x \geq a_2$.

   $\boxed{g \text{ est donc croissante sur } [a_2, 1]}$.

   (b) On a $g(x) = x \iff 2x^3 + 1 = 3x^3 + 2x \iff f_2(x) = 0 \iff x = a_2$.

   On remarque alors que $g([a_2), 1]] = [g(a_2), g(1)] = [a_2, \dfrac{3}{5}] \subset [a_2, 1]$ car g est croissante.

   Or, $x_0 = 1 \in [a_2, 1]$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{p+1} = g(x_p)$, donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_p \in [a_2, 1]$.

   Étant donné que g est croissante sur $[a_2, 1]$ et $a_1 = g(a_0) = g(1) = \dfrac{3}{5} \leq a_0$, on en déduit que la suite (x_p) est décroissante, comme elle est minorée, elle converge donc. Notons ℓ sa limite.

   g est continue sur $[a_2, 1]$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_p \in [a_2, 1]$, donc, la limite ℓ vérifie $\ell = g(\ell) \iff \ell = a_2$.

   $\boxed{\text{La suite } (x_p) \text{ tend vers } a_2 \text{ lorsque } p \text{ tend vers } +\infty}$.

Exercice n°2 RMS Mines PC 2017

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

Solution :

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

On utilise une comparaison série intégrale. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{2k+1}^{2k+3} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{2}{2k+1} \leqslant \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{1}{t}\,dt$$

En sommant de $k = 1$ à $k = 2n + 1$,

$$\frac{1}{2}\int_{3}^{4n+5} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} \leqslant \frac{1}{2}\int_{1}^{4n+3} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\frac{1}{2}(\ln(4n+5)-\ln(3)) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\ln(4n+3)$$

$$\ln n + \ln\left(4+\frac{5}{n}\right) - \ln(3) \leqslant 2u_n \leqslant \ln n + \ln\left(4+\frac{3}{n}\right)$$

On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2u_n}{\ln n} = 1$, d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{2}$.

Exercice n°3 RMS 2017 n°946 : Mines PC

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; Etucier la convergence de la série de terme général $U_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha + (n-p)^\alpha}$.

Solution :

Attention, ici U_n n'est pas la somme partielle d'une série...

• Une étude rapide de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha + (n-t)^\alpha}$ sur $[0,n]$ donne $\forall p \in [0,n]$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \leq \dfrac{1}{p^\alpha + (n-p)^\alpha} \leq \dfrac{C}{n^\alpha}$, où C est une constante strictement positive.

Alors $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \leq U_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha + (n-p)^\alpha} \leq \frac{C}{n^{\alpha-1}}$. De plus, $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ CV ssi $\alpha > 2$;

Donc par thm de comparaison pour la CV des séries de termes positifs, $\sum U_n$ CV ssi $\alpha > 2$.

Exercice n°4 Centrale PC 2017. retour élève

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).
2. Montrer que la suite de terme général $2^{-n}\ln(u_n)$ est convergente. On note λ sa limite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq \lambda - \dfrac{\ln u_n}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^n u_n}$.
4. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Solution :

1. La suite (u_n) est strictement croissante et la seule limite réelle possible est 0, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit $v_n = \dfrac{\ln u_n}{2^n}$.

   On a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) \leq \dfrac{1}{2^{n+1}u_n} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}u_0}$

   On en déduit que $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge donc que la suite (v_n) converge par telescopage.
3. Pour tout $k \geq n$, $\quad 0 \leq v_{k+1} - v_k \leq \dfrac{1}{2^{k+1}u_k} \leq \dfrac{1}{2^{k+1}u_n}$: on somme de $k=n$ à $k=N$ et on fait tendre N vers $+\infty$.

   Comme $\lim\limits_{N\to\infty} v_N = \lambda$, on obtient $0 \leq \lambda - v_n \leq \dfrac{1}{u_n}\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k-1} = \frac{1}{2^n u_n}$.
4. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$, $\quad v_n = \lambda + o(2^{-n})$

   On en déduit que $u_n = \exp(2^n\lambda + o(1))$ puis que $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\lambda 2^n}$

   Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$, $\quad \lambda > 0$.

Par croissances comparées, comme $n^2\, u_n = \mathrm{e}^{-\lambda 2^n + 2\ln(n)}$, $\dfrac{1}{u_n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On en déduit que la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ converge.

Exercice n°5 RMS 2017 n°1014 Centrale

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 \in \mathbb{R}^{+\star}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Nature des séries de termes généraux $(-1)^n$ et a_n^2 (Ajout du rédacteur : a_n pour terminer).

Solution :

1. On commence par étudier $f(x) = 1 - e^{-x}$ qui est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, 1[$. Ainsi l'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par f.
   De ce fait, par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$ et (a_n) est monotone.
   On compare alors $f(x)$ et x. Par concavité de la fonction f, celle-ci est inférieure à sa tangente en 0 qui est d'équation $y = x$. Donc $a_1 < a_0$: (a_n) est décroissante.
   Comme elle est décroissante, minorée, elle converge. En utilisant de nouveau la tangente, la limite de (a_n) est 0.
   Cela nous permet d'obtenir, d'après le théorème de convergence des séries alternées, que $\sum(-1)^n a_n$ converge.
2. En réalisant un D.L. (ou développement asymptotique), $a_{n+1} = 1 - (1 - a_n + \dfrac{a_n^2}{2}) + o(a_n^2)$.
   Donc $a_{n+1} - a_n \sim -\dfrac{a_n^2}{2}$. Or $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge vers $-a_0$. Donc $\sum a_n^2$ converge.
3. (En plus) En reprenant ce que l'on vient d'obtenir, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{a_n}{2} + o(a_n)$.
   Donc $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \sim -\dfrac{a_n}{2}$. Cette fois, la série télescopique diverge. Ainsi $\sum a_n$ diverge.

Exercice n°6 RMS 2017 n°832 : Mines

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\ dt$.

1. Déterminer une relation entre a_{n+2} et a_n.
2. Donner un équivalent de a_n.
3. Nature et somme éventuelle de la série de terme général a_n ?

Solution :

1.
$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \int_0^1 t^{n+1} t\sqrt{1-t^2}\ dt \\
&= \left[t^{n+1}(-\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2})\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n(-\frac{1}{3}(1-t^2)\sqrt{1-t^2})\ dt \\
&= \frac{(n+1)}{3}(a_n - a_{n+2}) \\
\frac{n+4}{3}a_{n+2} &= \frac{n+1}{3}a_n \\
a_{n+2} &= \frac{n+1}{n+4}a_n
\end{aligned}$$

2. La formule de récurrence obtenue fournit

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n+2)(2n)\dots 4} a_0 = \frac{(2n)!}{(n+1)2^{2n}(n!)^2} a_0$$

$$a_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 5} a_1 = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} 3a_1$$

Or $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$ en utilisant un changement de variable et $a_1 = \dfrac{1}{3}$. En utilisant la formule de Stirling, $a_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{n}}$ et $a_{2n+1} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{n}}$ soit $a_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}n^{3/2}}$

3. Ainsi, grâce au critère de Riemann, la série converge.
Ensuite :

$$\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} t^n \sqrt{1-t^2} \right) dt$$

Sous réserve d'existence, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}\, dt - \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}t^{N+1}}{1-t}\, dt$$

Or $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1-t} = \dfrac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}$. Les deux fonctions intégrées sont continues sur $[0,1[$ et équivalentes à $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t}}$ en 1, donc l'intégrale converge d'après le critère de Riemann sur un borné. Les deux intégrales existent donc.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}\, dt = \int_0^1 \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \underset{t=\cos u}{=} \int_0^{\pi/2} 1 + \cos u\, du = \frac{\pi}{2} + 1$$

Ensuite, pour $t \in [0,1[$, $t^{n+1} \to 0$ donc la suite de fonctions $(\dfrac{\sqrt{1-t^2}t^{N+1}}{1-t})_N$ converge simplement vers 0 sur $[0,1[$ et elle est majorée par $\dfrac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}$ qui est intégrable. On applique alors le TCD :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{\pi}{2} + 1$$

Exercice n°7

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f > 0$, $f' < 0$, $f(0) = 1$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n\, f(x_n)$.

a) Étudier la suite (x_n).

b) Déterminer la nature de la série de terme général x_n.

Solution :

a) Par hypothèse, l'intervalle $]0,+\infty[$ est stable par f donc la suite (x_n) est à valeurs strictement positives.

Par ailleurs, f est strictement décroissante et vaut 1 en 0, donc $f(x) < 1$ pour tout $x > 0$.
Par conséquent, $x_{n+1} \leq x_n$, la suite est donc strictement décroissante.
Etant minorée par 0, elle converge donc vers une limite ℓ.
f est continue, on peut donc effectuer un passage à la limite qui donne $\ell = \ell f(\ell) \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $f(\ell) = 1$ ce qui revient dans tous les cas à $\ell = 0$.

b) Ecrivons le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0 :
$f(x) = 1 + xf'(0) + o(x)$.
Comme x_n tend vers 0, on a $x_{n+1} = x_n(1 + x_nf'(0) + o(x_n))$.
On passe à l'inverse :

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n}(1 + x_nf'(0) + o(x_n))^{-1} = \frac{1}{x_n}(1 - x_nf'(0) + o(x_n)) = \frac{1}{x_n} - f'(0) + o(1)$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \longrightarrow -f'(0)$$

Le théorème de Cesàro appliqué à $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$ (ou le lemme de l'escalier) donne $\dfrac{1}{x_n} \sim -nf'(0) \Leftrightarrow x_n \sim \dfrac{-1}{nf'(0)}$.

On en conclut, d'après la règle des équivalents de séries à termes positifs et par comparaison à une série de Riemann que la série de terme général x_n est divergente.

Exercice n°8 Mines-Pont 2017 : BEOS -3113

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ une suite réelle positive de limite nulle.

On note D l'ensemble des $a > 0$ tels que la série de terme général $(u_n)^a$ converge.

1. Montrer que si D est non vide, alors c'est un intervalle de la forme $[s, +\infty[$ ou $]s, +\infty[$.
2. Donner un exemple où D est vide et un exemple où D est de la forme $]s, +\infty[$.

Solution :

1. Comme D est non vide, il existe un réel a strictement positif, un élément de D.
   Soit b un réel positif tel que $b \geqslant a$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N$, $0 < u_n \leqslant 1$.
   Donc $\forall n \geqslant N$, $0 < u_n^b \leqslant u_n^a$.
   Or $a \in D$. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^a$ converge.
   Alors par critère de comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^b$ converge. Ainsi $b \in D$.
   Donc $[a, +\infty[\subset D$.
   Finalement si D est non vide, D est un intervalle de la forme $]s, +\infty[$ ou $[s, +\infty[$.
2. ◇ Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par $\forall n \in I\!N$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.
   Alors $(u_n)_{n\in N}$ est une suite de réels positifs et de limite nulle.
   Par ailleurs pour tout réel a positif, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^a = +\infty$.
   Donc $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\,(u_n^a)$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. Donc par critère de comparaison $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^a$ diverge, pour tout réel a strictement positif.
   Donc D est vide.

   ◇ Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par $\forall n \in I\!N$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge. Donc $2 \notin D$.
   Soit $a > 2$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{a}{2}}}$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{a}{2}}}$ converge car $\dfrac{a}{2} > 1$.
   Ainsi $a \in D$.
   Donc $]2, +\infty[\subset D$.
   Finalement d'après la question 1, $D =]2, +\infty[$.

Exercice n°9 Mines-Ponts PSI 2016 - BEOS UPS

Existence et calcul éventuel de la somme de la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ \mathrm{d}x$$

Solution :

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n w_n$. w_n est une intégrale classique de Wallis (sur laquelle on peut démontrer beaucoup de résultats mais ici on n'en a pas réellement besoin).

• $\sum (-1)^n w_n$ est une série alternée.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos x \in [0, 1]$ donc $\cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x$ et donc $w_{n+1} \leqslant w_n$. On en déduit que (w_n) est une suite décroissante.

• Notons $f_n : x \mapsto \cos^n x$.

On remarque que $f_n \overset{CVS}{\to} f$ avec $f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right.$.

De plus $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant 1 = \varphi(x)$.

φ est intégrable donc le théorème de convergence dominée s'applique ici et

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Le critère spécial des séries alternées s'applique donc et ainsi $\sum (-1)^n w_n$ converge. De plus $\forall N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N} (-\cos x)^n\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N} \frac{1 - (-\cos x)^{N+1}}{1 + \cos x}\ \mathrm{d}x$$

• Notons $g_N(x) = \dfrac{1 - (-\cos x)^{N+1}}{1 + \cos x}$ alors on remarque que $g_N \overset{CVS}{\to} g$ avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 + \cos x}$.

• De plus $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|g_N(x)| \leqslant \dfrac{2}{1 + \cos x} = \varphi(x)$.

φ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc le théorème de convergence dominée s'applique ici encore et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x}\ \mathrm{d}x$$

On peut calculer cette intégrale avec une bonne connaissance de son cours de trigonométrie :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\ \mathrm{d}x = \left[\tan(\frac{x}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Exercice n°10 ODLT - planche 99 - Mines Ponts 2017 - exo 3

Discuter, en fonction de $a > 0$, de la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^a}{\prod_{p=1}^{n}(1 + a^p)}$.

Solution :

• Si $a > 1$, $\displaystyle\prod_{p=1}^{n} \underbrace{(1 + a^p)}_{\geq 1} \geq 1 + a^n \geq a^n$, donc $0 \leq u_n \leq \dfrac{n^a}{a^n}$.

Or, par croissances comparées, $\dfrac{n^a}{a^n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc, comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on a successivement $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^a}{a^n}$ converge, puis $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$

converge.

• Si $a=1$, $u_n=\dfrac{n}{2^n}=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc, comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann et $2>1$), d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ converge.

• Si $0<a<1$,

$$\begin{aligned}\prod_{p=1}^{n}(1+a^p)&=\exp\left(\sum_{p=1}^{n}\ln(1+a^p)\right)\\&\leq\exp\left(\sum_{p=1}^{n}a^p\right)\quad(\text{car }\forall x>-1,\ \ln(1+x)\leq x\text{ et }a^p\geq 0)\\&=\exp\left(a\times\frac{1-a^n}{1-a}\right)\leq\exp\left(\frac{a}{1-a}\right)\quad(\text{car exp est croissante et }\frac{a-a^{n+1}}{1-a}\leq\frac{a}{1-a}),\end{aligned}$$

donc $u_n\geq\dfrac{n^a}{\exp\left(\dfrac{a}{1-a}\right)}$, donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ est grossièrement divergente.

Exercice n°11 Centrale 2017

Pour tout $n\geq 1$ on pose $u_n=\left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}\right)^{1/(n+1)}$.

1. Rédiger en Python une fonction qui calcule u_n.
2. Soit $g_n=\sqrt[n]{u_n}$. Vérifier expérimentalement que (g_n) a une limite.
3. Montrer l'égalité : $\displaystyle\prod_{p=0}^{n}p!=\prod_{p=1}^{n}p^{n+1-p}$ et en déduire l'égalité : $\displaystyle\prod_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=\prod_{p=1}^{n}p^{2p-n-1}$.
4. Montrer que $\displaystyle\ln g_n=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\Big(\ln(\frac{p}{n+1})-1\Big)$.
5. En déduire la convergence de la suite (g_n).

Solution :

1. Cette question n'est pas tout-à-fait anodine du point de vue de l'informatique, car le produit des coefficients binomiaux qui intervient dans la définition de u_n croît très vite, et dépasse le plus grand nombre flottant représentable pour $n\geq 40$. Pour dépasser cette valeur, il est préférable de définir u_n par le biais de la formule : $u_n=\binom{n}{0}^{\frac{1}{n+1}}\binom{n}{1}^{\frac{1}{n+1}}\cdots\cdots\binom{n}{n}^{\frac{1}{n+1}}$.

   On calcule le coefficient binomial à l'aide de la formule : $\displaystyle\binom{n}{p}=\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k}$ (le résultat est un nombre flottant) :

```
def binom(n, p):
    x = 1
    for k in range(p):
        x *= (n-k) / (p-k)
    return x
```

   puis la suite (u_n) :

```
def u(n):
    x = 1
    for p in range(1, n):
```

```
        x *= binom(n, p)**(1/(n+1))
    return x
```

2. On réalise le script suivant :

```
G = [u(n)**(1/n) for n in range(1, 200)]
plt.plot(G)
plt.grid()
```

3. $\displaystyle\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n}\prod_{k=1}^{p} k = \prod_{1\leq k\leq p\leq n} k = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=k}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} k^{n-p+1}$.

$\displaystyle\prod_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \prod_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{(n!)^{n+1}}{\left(\prod_{p=0}^{n} p!\right)^2} = \frac{\prod_{p=1}^{n} p^{n+1}}{\prod_{p=1}^{n} p^{2(n+1-p)}} = \prod_{p=1}^{n} p^{2p-n-1}$.

4. On en déduit $\displaystyle\ln g_n = \frac{1}{n(n+1)}\ln\Big(\prod_{p=1}^{n} p^{2p-n-1}\Big) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\ln p$.

Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1) = 2\sum_{p=1}^{n} p - n(n+1) = 0$, donc on peut aussi écrire :

$$\ln g_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\ln p - \frac{\ln(n+1)-1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)$$

(la deuxième somme étant nulle) qui donne en regroupant : $\displaystyle\ln g_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\Big(\ln(\frac{p}{n+1})-1\Big)$.

5. On écrit $\displaystyle\frac{n}{n+1}\ln g_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\Big(2(\frac{p}{n+1})-1\Big)\Big(\ln(\frac{p}{n+1})-1\Big)$. La fonction $x\mapsto(2x-1)(\ln x-1)$ est décroissante sur $[0,1]$ donc on peut encadrer par deux intégrales :

$$\int_{\frac{p-1}{n+1}}^{\frac{p}{n+1}}(2x-1)(\ln x-1)dx \leq \frac{1}{n+1}\Big(2(\frac{p}{n+1})-1\Big)\Big(\ln(\frac{p}{n+1})-1\Big) \leq \int_{\frac{p}{n+1}}^{\frac{p+1}{n+1}}(2x-1)(\ln x-1)dx$$

En sommant on obtient : $\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}(2x-1)(\ln x-1)dx \leq \frac{n}{n+1}\ln g_n \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{1}(2x-1)(\ln x-1)dx$.

La fonction $x\mapsto(2x-1)(\ln x-1)$ étant intégrable sur $]0,1]$, on en déduit : $\displaystyle\lim(\ln g_n) = \int_0^1(2x-1)(\ln x-1)dx$.

On calcule cette intégrale par intégration par parties : $\displaystyle\int_0^1(2x-1)(\ln x-1)dx = \Big[(x^2-x)(\ln x-1)\Big]_0^1 - \int_0^1(x-1)dx = \frac{1}{2}$, et ainsi : $\lim g_n = \sqrt{\mathrm{e}}\approx 1,65$, valeur conforme au graphe obtenu ci-dessus.

Thème : Algèbre linéaire

Exercice n°12 Planche BEOS 3771 Centrale PC 2017 et RMS 2017

On se place dans un espace vectoriel muni de l'une des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$, et on note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & p \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et la matrice de l'endomorphisme de $\mathcal{R}^3$ canoniquement associé à f.

1. Trouver p tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $\|AX\| \leq \|X\|$.
2. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(x)$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

1) Développer la norme de AX puis factoriser au maximum. l'inégalité.

Solution :

1. On cherche $p \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad \|AX\| \leq \|X\| \iff \|AX\|^2 \leq \|X\|^2$$
$$\iff x_1^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 + px_3\right) + \frac{1}{2}x_3^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$\iff 0 \leq \frac{3}{4}x_2^2 - p^2x_3^2 + \frac{3}{4}x_3^2 - px_2x_3$$
$$\iff 0 \leq 3x_2^2 - 4px_3^2 + 3x_3^2 - 4px_2x_3$$

On se ramène à ce que l'on appelle une forme quadratique, l'étude exhaustive de ce type d'objets n'est plus au programme de PC, faisons les choses à la main. On veut trouver les valeurs de p telles que cette expression soit toujours positive.

Si $x_3 = 0$, la propriété est toujours vraie, donc on n'a aucune condition sur p à remplir.

Si $x_3 \neq 0$, quitte à diviser l'inégalité par x_3, et à poser $X = \dfrac{x_2}{x_3}$, on se ramène à chercher p tel que

$$3X^2 - 4pX + 3 - 4p^2 \geq 0$$

Pour cela, il faut et il suffit que le discriminant soit positif ou nulle, c'est-à-dire

$$\Delta = (-4p)^2 - 4 \times 3 \times (3 - 4p^2) \geq 0 \iff 4(16p^2 - 9) \geq 0 \iff p^2 \leq \frac{9}{16} \iff p \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\boxed{\text{La condition nécessaire et suffisante pour que } \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leq \|X\| \text{ est } p \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right].}$$

2. On cherche à calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A^k$, pour cela calculons A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

On a $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & p \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & p \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & \frac{3}{4}p \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$.

On montre par récurrence sur k que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k : A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^k & p\frac{a_k}{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & 1/2^k \end{pmatrix}$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ est vraie.

$\mathcal{P}_0$ est vraie, $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & pa_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a_0 = 0$.

Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

$$A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^k & p\dfrac{a_k}{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & 1/2^k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & p \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & p \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^{k+1} & p\left(1/2^k + a_k/2^k\right) \\ 0 & 0 & 1/2^{k+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^{k+1} & p\dfrac{a_{k+1}}{2^k} \\ 0 & 0 & 1/2^{k+1} \end{pmatrix}$ si on pose $a_{k+1} = a_k + 1$.

$\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

En conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^k & p\dfrac{a_k}{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & 1/2^k \end{pmatrix}$ avec $a_0 = 0$ et $a_{k+1} = a_k + 1$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$ et donc, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^k} & p\dfrac{k}{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2^k} \end{pmatrix}$.

Et donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^k} & p\dfrac{k}{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} & p\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}$.

On obtient pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A^k X = \begin{pmatrix} (k+1)x_1 \\ x_2 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + p x_3 \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} \\ x_3 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}$.

$\star$ Si $x_1 \neq 0$, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right)_n$ n'a pas de limite.

$\star$ Si $x_1 = 0$,

Étant donné que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right)_n$ converge vers $\displaystyle\sum_{k+}^{+infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ en tant que somme d'une série géométrique $\sum x^k$ avec $|x| < 1$.

Et, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$ est une série entière de rayon de convergence 1, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Pour étudier la convergence d'une suite matricielle, on étudie la convergence coordonnées par coordonnées, ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f^k(x) = (0, 2x_2 + 4p x_3, 2x_3)}.$$

Exercice n°13 RMS Mines PC 2017

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, si p est un projecteur, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
   La réciproque est-elle vraie ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^m = \mathrm{id}$ pour un entier $m \geqslant 1$.
   Montrer que $p = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k$ est un projecteur.

3. Montrer que $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{tr}(u^k) = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.

Solution :

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur. Alors $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. Dans une base adaptée à cette somme directe, si on note $r = \mathrm{rg}(p)$, la matrice de p est
   $$M = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_r \end{pmatrix}$$
   Donc $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}(M) = r = \mathrm{rg}(p)$.
   La réciproque n'est pas vraie. Contre-exemple : soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 2$ mais $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq A$. Ainsi $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ mais p n'est pas un projecteur.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^m = \mathrm{id}$ pour un entier $m \geqslant 1$.
   Soit $p = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k$. $p \in \mathcal{L}(E)$.
   $$u \circ p = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1} = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} u^k + u^m\right) = p$$
   car $u^m = \mathrm{id}$.
   On en déduit par récurrence que $\forall k \in \{0, \cdots n\}$, $u^k \circ p = p$, donc
   $$p \circ p = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k = p$$
   Ainsi p est un projecteur.

3. • $\mathrm{tr}(p) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{tr}(u^k)$;
   • $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}))$ car p est un projecteur.
   Or :
   • si $u(x) = x$, alors $\forall k \in \{0, \cdots n\}$, $u^k(x) = x$ donc $p(x) = x$;
   • si $p(x) = x$, alors $u(p(x)) = u(x)$; comme $u \circ p = p$, on en déduit que $p(x) = u(x)$, puis $u(x) = x$.
   On a prouvé que $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.
   Conclusion : $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{tr}(u^k) = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.

Exercice n°14 RMS 2017 n°887 : Mines PC
Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N^n = 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AN = NA$.
Montrer que $\det(A + N) = \det(A)$.

Solution :
J'ai ici décomposé l'exercice avec des questions intermédiaires... pour dégoupiller les pièges. Sans celles-ci, je vois mal un de mes élèves y parvenir !

0°) Préliminaire : Montrer que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(N) = \{0\}$.

C'est évident si $N = 0\dots$

Sinon, N est nilpotente non nulle donc $\exists p \in \mathbb{N}^*/\ N^p = 0$. X^p est polynôme annulateur de N.

Alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(N)$, $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(N) \subset \{0\}$.

Or N n'est pas inversible sinon $N^p = 0$ le serait, ce qui est absurde. Donc 0 est valeur propre de N : $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(N)$

Ou bien, sur $\mathbb{C}$, on sait que N étant complexe, N a au moins une valeur propre (P_N a au moins une racine dans $\mathbb{C}$ corps algébriquement clos), donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N) \neq \dots$ En conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(N) = \{0\}}$

1°) Cas très particulier : $A = I_n$

$\boxed{\text{Montrons donc que, si } N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente, alors } \det(I_n + N) = \det(I_n) = 1}$

$N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc N est trigonalisable (P_N est scindé dans $\mathbb{C}$: ici $P_N(X) = (-1)^n X^n$)

On a donc : $\exists P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$, $\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $N = PTP^{-1}$.

De plus, on retrouve sur la diagonale de T l'ensemble des valeurs propres de N : $T = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $\det(I_n + N) = \det(I_n + PTP^{-1}) = \det(PP^{-1} + PTP^{-1}) = \det(P)\det(I_n + T)\det(P^{-1}) = \det(I_n + T)$

D'où $\det(I_n + N) = \det \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

2°) Généralisons :

$\boxed{\text{Montrons que, pour } A \textbf{ inversible}, \text{ si } N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente et } AN = NA, \text{ alors } \det(A + N) = \det(A)}$

Si A est inversible, $\det(A + N) = \det(A(I_n + A^{-1}N)) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}N)$.

Il suffit de montrer que $\det(I_n + A^{-1}N) = 1$, ce qui ramène au cas précédent :

Il suffit de montrer que $A^{-1}N$ est nilpotente. Or, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A^{-1}N)^k = A^{-1}NA^{-1}N \dots A^{-1}N$.

Mais $AN = NA$ donc, (A inversible) $A^{-1}ANA^{-1} = A^{-1}NAA^{-1}$, i.e. $NA^{-1} = A^{-1}N$: A^{-1} commute avec N

Remarque : On a montré en fait : A commute avec $N \Leftrightarrow A^{-1}$ commute avec N.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A^{-1}N)^k = (A^{-1})^k N^k$, d'où, puisque $N^p = 0$, $(A^{-1}N)^p = (A^{-1})^p N^p = 0$: $A^{-1}N$ est nilpotente

3°) Cas général :

$\boxed{\text{Montrons que, pour } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ si } N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente et } AN = NA, \text{ alors } \det(A + N) = \det(A)}$

Remarque : On va utiliser la densité des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et la continuité de $M \mapsto \det(M)$; Il suffira de passer à la limite dans la relation, vraie sur les matrices inversibles…qui commutent avec N !

Mais pour cela, nous avons besoin d'une suite d'éléments de $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$, qui converge vers A **et** qui commutent avec N.

Rappel : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C}))/\ A_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$.

Que A soit inversible ou non (que $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ou non), puisque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ est fini (de cardinal inférieur à n), l'ensemble $\{|\lambda| / \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \lambda \neq 0\}$ est fini, minoré par 0, donc admet un **minimum** $\rho > 0$.

Alors, pour tout $x \in]0, \rho[$, $x \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, donc $P_A(x) \neq 0$ donc $\det(A - xI_n) \neq 0$ et $A - xI_n$ est inversible.

Puisque $\dfrac{1}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}/\ \forall k \geq k_0$, $0 < \dfrac{1}{k} < \rho$. On considère alors, pour $k \geq k_0$, $A_k = A - \dfrac{1}{k}I_n$:

On a • $A_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$. • $\forall k \geq k_0$, puisque $\dfrac{1}{k} \in]0, \rho[$, $A_k \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\text{Toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles : } \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

Mieux : En fait, on a de plus, puisque $AN = NA$, $\forall k \geq k_0$, $A_kN = AN - \dfrac{1}{k}N = NA - \dfrac{1}{k}N = NA_k$:

$\boxed{\text{Pour } A \text{ commutant avec } N : A \text{ est limite d'une suite de matrices inversibles } \textbf{commutant avec } N.}$

Application :

On peut donc affirmer que $\forall k \geq k_0$, $\det(A_k + N) = \det(A_k)$

et donc, par passage à la limite quand k tend vers $+\infty$, **par continuité de** det, $\det(A + N) = \det(A)$.

Exercice n°15 Mines 17-ex rms 901

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f^2 = Id, \qquad g^2 = Id, \qquad , f \circ g - g \circ f = 0$$

1. Montrer que E est de dimension paire .On note $\dim(E) = 2p$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_p \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$$

Solution :

1. Comme $f^2 = Id$, f est une symétrie et $E = \operatorname{Ker}(f - Id) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id)$ (*cours*).
   De même, g est une symétrie et $E = \operatorname{Ker}(g - Id) \oplus \operatorname{Ker}(g + Id)$.
   De plus, comme $f \circ g + g \circ f = 0$,
   $\forall x \in \operatorname{Ker}(f - Id),\ g(x) \in \operatorname{Ker}(f + Id)$ et $\forall x \in \operatorname{Ker}(f + Id),\ g(x) \in \operatorname{Ker}(f - Id)$.
   De plus g est un automorphisme de E donc
   $\dim(\operatorname{Ker}(f - Id)) = \dim(g(\operatorname{Ker}(f - Id))) \leq \dim(\operatorname{Ker}(f + Id)) = \dim(g(\operatorname{Ker}(f + Id))) \leq \dim(\operatorname{Ker}(f - Id))$
   Donc $\dim(\operatorname{Ker}(f - Id)) = \dim(g(\operatorname{Ker}(f - Id))) = \dim(\operatorname{Ker}(f + Id)) = \dim(g(\operatorname{Ker}(f + Id))) = \dim(\operatorname{Ker}(f - Id))$
   On en déduit en particulier que $\dim(\operatorname{Ker}(f - Id)) = \dim(\operatorname{Ker}(f + Id))$ puis que $\dim(E) = 2p$ où $p = \dim(\operatorname{Ker}(f - Id))$.
2. D'autre part, ce qui précède prouve que
   $g(\operatorname{Ker}(f - Id)) = \operatorname{Ker}(f + Id)) \quad (1)$
   $g(\operatorname{Ker}(f + Id)) = \operatorname{Ker}(f - Id)) \quad (2)$.
   On a supposé $n \geq 1$ donc $p \geq 1$.
   Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker}(f - Id))$
   Comme $\begin{cases} g \in GL(E) \\ g(\operatorname{Ker}(f - Id)) = \operatorname{Ker}(f + Id) \end{cases}$, $\quad (g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une base de $\operatorname{Ker}(f + Id)$.
   Par concaténation de bases de s.e.v supplémentaires, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une base de E.
   La matrice de f dans cette base est bien $\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_p \end{array}\right)$
   Comme $g^2 = Id, \quad \forall i \in [\![1, p]\!] \quad g(g(e_i)) = e_i$ et la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$.

Exercice n°16 RMS 2017 n°982 Centrale

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nécessairement de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \text{id}$. On suppose que $V = \operatorname{Im}(p)$ est stable par u. On pose $q = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \, o \, p \, o \, u^{n-k}$. Montrer que q est un projecteur dont le noyau est un supplémentaire de V stable par u.

Solution :

$$\begin{aligned}
q\,o\,q &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k\,o\,p\,o\,u^{n-k}\right)\,o\,\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u^j\,o\,p\,o\,u^{n-j}\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u^k\,o\,p\,o\,u^{n-k}\,o\,u^j\,o\,p\,o\,u^{n-j}\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u^k\,o\,p\,o\,u^{n-k+j}\,o\,p\,o\,u^{n-j}
\end{aligned}$$

Pour $x \in V$, $u(x) \in V$ donc $p(u(x)) = u(x)$ par caractérisation de l'image d'un projecteur.
Or pour $x \in E$, $(p\,o\,u^{n-j})(x) \in V$. Par stabilité, $u^{n-k+j}\,o\,p\,o\,u^{n-j}(x) \in V$.
Donc $p\,o\,u^{n-k+j}\,o\,p\,o\,u^{n-j}(x) = u^{n-k+j}\,o\,p\,o\,u^{n-j}(x)$. Finalement

$$q\,o\,q = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u^k\,o\,u^{n-k+j}\,o\,p\,o\,u^{n-j} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u^j\,o\,p\,o\,u^{n-j} = q$$

car $u^n = \mathrm{id}$ et que l'on somme sur k, n fois le même terme.

Montrons que $u\,o\,q = q\,o\,u$. Ainsi le noyau de q est stable par u.

$$\begin{aligned}
q\,o\,u &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k\,o\,p\,o\,u^{n-k}\right)\,o\,u\\
&= \frac{1}{n}u\sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\,o\,p\,o\,u^{n-k+1}\\
&= \frac{1}{n}u\sum_{k=0}^{n-1} u^{k}\,o\,p\,o\,u^{n-k}\\
&= \frac{1}{n}u\left(\sum_{k=1}^{n-1} u^{k}\,o\,p\,o\,u^{n-k} + u^n\,o\,p\,o\,u^0\right) \text{ car } u^n = u^0 = id\\
&= u\,o\,q
\end{aligned}$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p$. $q(x) = 0$. Or, V est stable par u et comme $x \in V$, $p\,o\,u^{n-k}(x) = u^{n-k}(x)$. Donc $q(x) = x$.
Ainsi $x = 0$.
La somme est bien directe. Ensuite, par analyse-synthèse, considérons $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} q$ et $z \in \operatorname{Im} p$.
Alors $q(x) = q(z) = z$ car $z \in \operatorname{Im} p$ d'après l'étude précédente.
Puis $y = x - q(x)$.
On vérifie : $q(y) = q(x) - q^2(x) = 0$ et $q(x)$ est évidemment dans $\operatorname{Im}(p)$ par écriture de q et stabilité de $\operatorname{Im}(p)$ par u.

Exercice n°17 RMS 2017 n°763 : Mines

Soit $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \operatorname{Tr}(M)I_n + M$.

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Trouver $\operatorname{Ker}(\psi)$ et $\operatorname{rg}(\psi)$.
3. Trouver un polynôme annulateur de ψ.
4. L'application ψ est-elle bijective ? Si oui, trouver ψ^{-1}.
5. (Trouver les valeurs propres de ψ).

Solution :

1. $\psi(M)$ est évidemment une matrice et $\forall\lambda,\ M,\ N,\ \psi(\lambda M+N)=\mathrm{Tr}(\lambda M+N)I_n+\lambda M+N=\lambda\psi(M)+\psi(N)$.
   C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. On résout $\psi(M)=0$ soit $\mathrm{Tr}(M)I_n+M$. Donc $M=-\mathrm{Tr}(M)I_n$.
   Si on applique de nouveau la trace, on obtient $\mathrm{Tr}(M)=-n\mathrm{Tr}(M)$. Comme n est un entier, $\mathrm{Tr}(M)=0$ et $M=0$ grâce à la relation précédente.
   ψ est donc injective. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\psi)=n^2$.
3. $\psi^2(M)=\mathrm{Tr}(\psi(M))I_n+\psi(M)=\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(M)I_n+M)I_n+\mathrm{Tr}(M)I_n+M=(n+2)\mathrm{Tr}(M)I_n+M=(n+2)\psi(M)-(n+1)M$
   Finalement $\psi^2=(n+2)\psi-(n+1)I_d$
4. Comme le rang est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée, ψ est surjective donc bijective.
   En utilisant le polynôme annulateur, on compose par ψ^{-1} : $\psi=(n+2)I_d-(n+1)\psi^{-1}$.
   Ainsi $\psi^{-1}(M)=\dfrac{1}{n+1}\left((n+2)M-\mathrm{Tr}(M)I_n-M\right)=M-\dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{n+1}I_n$
5. $\mathrm{Tr}(M)I_n+M=\lambda M$ soit $(\lambda-1)M=\mathrm{Tr}(M)I_n$.
   Soit $\lambda=1$ et $\mathrm{Tr}(M)=0$. On obtient donc un sous-espace propre de dimension n^2-1.
   Soit $\lambda=n+1$ en appliquant la trace sur l'égalité et $M=I_n$ est un vecteur propre associé.

Exercice n°18

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ tel que $u^2=-id$.
a) Montrer que n est pair.
b) Montrer que u ne laisse stable aucun hyperplan de E.

Solution :

a) On passe au déterminant : $u^2=-id\Rightarrow\det(u)^2=(-1)^n$.
Comme E est $\mathbb{R}$ev, $\det(u)$ est un réel, ce qui entraîne que $\det(u)^2\geq 0$.
Par conséquent n est pair.

b) Soit F un hyperplan de E. Si F était stable par u, on pourrait considérer l'endomorphisme v de F induit par u. v vérifierait alors la même relation $v^2=-id_F$. Or, si n est pair, la dimension de F est impair et d'après la question a), v ne peut exister. Conclusion : u ne laisse stable aucun hyperplan de E.

Exercice n°19 Mines-Pont 2017 : BEOS -3769

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$.

Ces matrices sont-elles semblables sur $\mathbb{C}$? Le sont-elles sur $\mathbb{R}$?

Solution :

Notons $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.
Alors $f(e_1)=e_1+3e_2+2e_3$, $f(e_2)=2e_1+e_2+3e_3$ et $f(e_3)=3e_1+2e_2+e_3$.
La famille (e_3,e_2,e_1) est aussi une base de $\mathbb{R}$, notée $\mathscr{B}'$.
Alors la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$.
A et B sont donc les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.
Ainsi A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice n°20 ENSEA 2017 - BEOS UPS

Soit E un espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tel que $f\circ g=Id_E$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}f$.
2. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}g$.
3. Montrer que $\text{Ker}f$ et $\text{Im}g$ sont supplémentaires dans E.
4. Déterminer un espace vectoriel E et deux endomorphismes f et g de E tel que $f \circ g = Id_E$ et $g \circ f \neq Id_E$.

Solution :

Soit E un espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tel que $f \circ g = Id_E$.

1. On a toujours $\text{Ker}f \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
   Prouvons l'inclusion réciproque : soit $x \in \text{Ker}(g \circ f)$, on a alors $g \circ f(x) = 0_E$ donc $f \circ g \circ f(x) = f(0_E) = 0_E$. Or $f \circ g = I_d$ donc $f(x) = 0_E$ et $x \in \text{Ker}f$.
   On en déduit que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}f$.
2. On a toujours $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}g$.
   Prouvons l'inclusion réciproque : soit $x \in \text{Im}g$,il existe $a \in E$, $g(a) = x$, or $f \circ g = I_d$ donc $x = g \circ f \circ g(a) = (g \circ f)(g(a))$ c'est à dire $x \in \text{Im}(g \circ f)$.
   On en déduit que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}g$.
3. On remarque que $(g \circ f)^2 = g \circ f \circ g \circ f = g \circ f$ car $f \circ g = I_d$ donc $g \circ f$ est un projecteur ainsi $\text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f)$ sont supplémentaires et d'après les deux questions précédentes on en conclut que $\text{Ker}f$ et $\text{Im}g$ sont supplémentaires dans E.
4. Posons $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : u \mapsto u'$ et $g : u \mapsto \displaystyle\int_0^t u(t)\ \mathrm{d}t$.
   Alors d'après le théorème fondamentale de l'analyse $f(g(u)) = u$ mais si $u(0) \neq 0$ alors $(g \circ f)(u) \neq u$.

Exercice n°21 ODLT - planche 102 - Mines Ponts 2017 - exo 2

Caractériser une matrice M de projecteur qui commute avec sa transposée.

On pourra étudier $A = M^tM$ et montrer que $KerA = KerM$.

Solution :

M est donc une matrice telle que $M^2 = M$ et ${}^tMM = M^tM$.
On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$.
Soit $A = M^tM$.
• Comme

$$A^2 = M^tMM^tM = M^2 \cdot {}^t(M^2) = M^tM = A,$$

A est une matrice de projecteur.
• Comme ${}^tA = {}^t({}^tM)^tM = M^tM = A$, A est la matrice d'une projection orthogonale.
En effet, pour tout $x \in KerA$, pour tout $y \in Im(A)$,, il existe z tel que $y = Az$, et alors

$$\langle y, x \rangle = {}^tyx = {}^tz^tAx = {}^tz(Ax) = 0,$$

ce qui assure que $ImA \perp KerA$.
• Soit $x \in \text{Ker}M$, alors $Ax = M^tMx = {}^tM(Mx) = 0$, donc $x \in \text{Ker}A$.
Soit $x \in \text{Ker}A$, alors $Ax = 0$, donc $\langle x, Ax \rangle = 0$, ie ${}^txAx = {}^tx^tMMx = \|Mx\|^2 = 0$, donc $Mx = 0$, donc $x \in \text{Ker}M$.
On a donc $\text{Ker}A = \text{Ker}M$.
• Comme $A = M^tM$, on a $\text{Im}A \subset \text{Im}M$, et, d'après le théorème du rang,

$$\dim ImA = n - \dim \text{Ker}A = n - \dim \text{Ker}M = \dim \text{Im}M,$$

donc on a $\text{Im}M = \text{Im}A$.
• M et A sont donc deux projecteurs ayant le même noyau et la même image, donc $M = A$ et, par suite, M est la matrice d'un projecteur orthogonal.

Exercice n°22 Centrale 2017

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Définir une fonction Python `M(n)` qui renvoie la matrice M. Tester pour plusieurs valeurs de n. On notera dans la suite M_n la matrice M de format n.
   Écrire une fonction python qui renvoie M_{2p}^3 pour $p \in \{2,\dots,6\}$. Que peut-on conjecturer ? Démontrez-le (utiliser des produits par blocs).
2. Écrire une fonction python qui renvoie M_{2p+1}^3 pour $p \in \{1,\dots,5\}$. Que peut-on conjecturer ?
3. M_n est-elle diagonalisable ? Quel est son rang ? Combien a-t-elle de valeurs propres ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, λ une valeur propre de A et Y un vecteur propre associé. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, que vaut A^kY ? Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k A^k Y$?
5. Démontrer la conjecture de la question b.

Solution :

1. On définit la fonction :

```
def M(n):
    A = np.zeros((n, n), dtype=int)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if (i+j)%2 == 0:
                A[i, j] = 1
    return A
```

   On réalise le script :

```
for p in range(2, 7):
    A = M(2*p)
    print(A.dot(A).dot(A))
```

   qui permet de conjecturer que $M_{2p}^3 = p^2 M_{2p}$.

   Découpons M_{2p} en blocs de taille 2 ; on obtient $M_{2p} = \begin{pmatrix} I_2 & \cdots & I_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_2 & \cdots & I_2 \end{pmatrix}$ et on calcule alors $M_{2p}^2 = pM_{2p}$ donc $M_{2p} = p^2 M_{2p}$.
2. On réalise le script :

```
for p in range(1, 6):
    A = M(2*p+1)
    print(A.dot(A).dot(A))
```

   qui permet de conjecturer que $M_{2p+1}^3 = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = \begin{cases} (p+1)^2 & \text{si } i+j \equiv 2 \bmod 4 \\ p^2 & \text{si } i+j \equiv 0 \bmod 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. M_n est symétrique réelle donc diagonalisable. Il n'y a que deux types de colonnes différentes (et non proportionnelles) donc $\text{rg}(M_n) = 2$ et 0 est valeur propre d'ordre $n-2$. Ainsi, $\text{Sp}(M_n) = \{0, a, b\}$ où a et b sont non nuls mais sont peut-être égaux.
4. On a bien sûr $A^kY = \lambda^k Y$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k A^k Y = \Big(\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \lambda^k\Big) Y$.

5. Notons U les colonnes impaires de M_{2p+1} et V les colonnes paires. Il est facile d'observer que U est vecteur propre de M pour la valeur $p+1$ et V pour la valeur p. Ainsi, $M_{2p+1}^2 U = (p+1)^2 U$ et $M_{2p+1}^2 V = p^2 V$ et ainsi M_{2p+1}^3 est une alternance de colonnes valant $(p+1)^2 U$ et $p^2 V$, ce qui prouve la conjecture.

Thème : Réduction

Exercice n°23 Planche BEOS 3242 Centrale PC 2017

Pour tout entier $n \geq 3$, on note C_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la première ligne, de la dernière ligne et de la première colonne, qui valent 1.

1. Écrire en Python une fonction `c(n)` qui renvoie la matrice C_n.
2. On note σ_n le spectre de la matrice C_n. Pour n variant de 3 à 6, calculer (avec `Python`) le nombre $(\lambda-1)^2$ pour tout $\lambda \in \sigma_n$.
   En déduire une conjecture sur les valeurs propres de C_n.
3. Pour tout $n \geq 4$, montrer que C_n admet une valeur propre multiple et minorer sa multiplicité.
4. On note P_n le polynôme caractéristique de C_n. Calculer $P_n(1)$ et en déduire l'ensemble σ_n.
5. On note u_n l'endomorphisme canoniquement associé à C_n. Retrouver le résultat de la question 4 en cherchant directement les vecteurs propres de u_n.
   Donner une base de vecteurs propres pour u_n.
6. Montrer que la famille (C_n, C_n^2, C_n^3) est liée.

Solution :

1. ```
   import numpy as np

   def c(n):
      C=np.zeros((n,n))
      C[:,0]=np.ones((1,n))
      C[0,:]=np.ones((1,n))
      C[n-1,:]=np.ones((1,n))
      return(C)
   ```
2. ```
   import numpy.linalg as alg

   for i in range(3,7):
      Lambda=alg.eigvals(c(i))
      for la in Lambda:
         print((la-1)**2)
   ```
3. Pour $n \geq 4$, 0 soit valeur propre de C_n, en effet, C_n est de rang 2, puisque les deux premières colonnes de C_n sont non liés et les colonnes C_2, C_3, ..., C_n sont égales, donc, d'après le théorème du rang, 0 est valeur propre de C_n et l'espace propre associé est de dimension $n - \mathrm{rg}(C_n) = n-2$.
   0 est donc valeur propre de C_n d'ordre de multiplicité au moins $n-2$.
4. Ainsi, X^{n-2} divise le polynôme P_n caractéristique de C_n, ceci permet d'en déduire que $P_n = X^{n-2}(X^2 + aX + b)$ puisque le polynôme caractéristique est unitaire.
   On sait que $P_n = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A)$, or, $\mathrm{tr}(A) = 2$, donc, $P_n = X^n - 2X^{n-1} + bX^{n-2}$.
   Par ailleurs, $P_n(1) = b-1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & \dots & & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ -(n-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ en faisant l'opération $L_n \leftarrow L_2 + .. + L_n$.
   On développe par rapport à la dernière ligne puis par rapport à la dernière colonne et on obtient :
   $$P_n(1) = (-1)^{n+1}(-(n-1)).((-1)^n.(-1)). \begin{vmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix} = -(n-1) = b-1.$$

Ainsi, $b = -n + 2$. Ceci nous donne $P_n = X^n - 2X^{n-1} - n + 2$.
Les racines de P_n sont 0 d'ordre de multiplicité $n-2$ et les racines de le l'équation $x^2 - 2x - n + 2 = 0$ $\iff (x-1)^2 - n + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = n-1 \iff x - 1 = \pm\sqrt{n-1} \iff x = 1 \pm \sqrt{n-1}$.
En conclusion, $\boxed{\sigma_n = \{0, 1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1}\}}$.

5. On note u_n l'endomorphisme canoniquement associé à C_n. Retrouver le résultat de la question 4 en cherchant directement les vecteurs propres de u_n.
On résout le système $u_n(x) = \lambda x$ où $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et λ est un paramètre réel. Ceci nous donne

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + ... + x_n & = & \lambda x_1 \\ x_1 & = & \lambda x_2 \\ \vdots & & \\ x_1 & = & \lambda x_{n-1} \\ x_1 + ... + x_n & = & \lambda x_n \end{array}\right.$$

On fait l'opération $L_n \leftarrow L_n - L_1$, ceci nous donne

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + ... + x_n & = & \lambda x_1 \\ x_1 & = & \lambda x_2 \\ \vdots & & \\ x_1 & = & \lambda x_{n-1} \\ 0 & = & \lambda(x_n - x_1) \end{array}\right.$$

Si $\lambda = 0$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + x_n & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \\ \vdots & & \\ x_1 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff x_1 = x_n = 0$$

Ainsi, 0 est valeur propre de u_n et l'espace propre associé est

$\mathrm{Ker}(u_n) = \{(0, x_2, ..., x_{n-1}, 0) \,/\, (x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}\} = \mathrm{Vect}((0,1,0,...,0), (0,0,1,0,...,0), ..., (0,...,0,1,0)$

Si $\lambda \neq 0$, on obtient,

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x_1 + x_2 ... + x_{n-1} & = & \lambda x_1 \\ x_2 & = & \frac{1}{\lambda}x_1 \\ \vdots & & \\ x_{n-1} & = & \frac{1}{\lambda}x_1 \\ x_n & = & x_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} 2x_1 + \frac{n-2}{\lambda}x_1 & = & \lambda x_1 \\ x_2 & = & \frac{1}{\lambda}x_1 \\ \vdots & & \\ x_{n-1} & = & \frac{1}{\lambda}x_1 \\ x_n & = & x_1 \end{array}\right.$$

C'est à dire

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2\lambda x_1 + (n-2)x_1 & = & \lambda^2 x_1 \\ x_2 & = & \frac{1}{\lambda}x_1 \\ \vdots & & \\ x_{n-1} & = & \frac{1}{\lambda}x_1 \\ x_n & = & x_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} (\lambda^2 - 2\lambda - (n-2))x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & \frac{1}{\lambda}x_1 \\ \vdots & & \\ x_{n-1} & = & \frac{1}{\lambda}x_1 \\ x_n & = & x_1 \end{array}\right.$$

Donc, si $\lambda^2 - 2\lambda - (n-2) = 0 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{n-1}$, λ est valeur propre de u_n.
De plus, $\mathrm{Ker}(u_n - (1-\sqrt{n-1})id) = \mathrm{Vect}((1-\sqrt{n-1}, 1, ..., 1, 1-\sqrt{n-1}))$ et $\mathrm{Ker}(u_n - (1+\sqrt{n-})id) = \mathrm{Vect}((1+\sqrt{n-1}, 1, ..., 1, 1+\sqrt{n-1}))$.
En conclusion, $\boxed{\{(0,1,0,...,0), (0,0,1,0,...,0), ..., (0,...,0,1,0), (1-\sqrt{n-1}, 1, ..., 1, 1-\sqrt{n-1}), (1+\sqrt{n-}}$
est une base de vecteurs propres pour u_n.

6. Notons ${}_l a_+ = 1+\sqrt{n-1}$ et $\lambda_- = 1-\sqrt{n-1}$.
Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}C_nP = \mathrm{diag}(0, ..., 0, \lambda_+, \lambda_-)$.
Alors, $P^{-1}C_n^2P = \mathrm{diag}(0, ..., 0, \lambda_+^2, \lambda_-^2)$ et $P^{-1}C_n^3P = \mathrm{diag}(0, ..., 0, \lambda_+^3, \lambda_-^3)$.
Or, $\lambda - +$ et λ_- vérifient $\lambda^2 - 2\lambda - (n-2) = 0$, donc, 0, λ_+ et λ_- vérifient $\lambda^3 - 2\lambda^2 - (n-2)\lambda = 0$, c'est à dire $P^{-1}C_n^3P - 2P^{-1}C_n^2P - (n-2)P^{-1}C_nP = 0 \iff P^{-1}\left(C_n^3 - 2C_n^2 - (n-2)C_n\right)P = 0 \iff C_n^3 - 2C_n^2 - (n-2)C_n = 0$.
$\boxed{\text{La famille } (C_n, C_n^2, C_n^3) \text{ est donc liée.}}$

Exercice n°24 Planche BEOS 3492 Centrale PC 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$. Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{N}} \mathrm{tr}(A^p)z^p$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Solution :

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathcal{C})$, son polynôme caractéristique est donc scindé dans $\mathcal{C}$, A est ainsi trigonalisable et si on note λ_1, ..., λ_n ses valeurs propres, alors, pour tout entier naturel p, $\mathrm{tr}(A^p) = \lambda_1^p + ... + \lambda_n^p$.

Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A, alors, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \lambda^n z^n$ a un rayon de convergence infini et a pour somme $1 = \dfrac{1}{1-\lambda z}$.

Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de A, alors, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \lambda^n z^n$ a un rayon de convergence $\dfrac{1}{|\lambda|}$ et a pour somme $\dfrac{1}{1-\lambda z}$ pour $|z| < \dfrac{1}{|\lambda|}$.

Notons $\rho = \max\{|\lambda_j| \,/\, j \in [\![1, p]\!]\}$, ($\rho$ s'appelle le rayon spectral de la matrice A).

$\boxed{\text{Le rayon de convergence } R \text{ de la série entière } \sum \mathrm{tr}(A^p)z^p \text{ vaut } R = \dfrac{1}{\rho} \text{ si } \rho \neq 0 \text{ et } R = +\infty \text{ si } \rho = 0.}$

Pour tout z tel que $|z| < R$,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^p)z^p =} \quad & \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p z^p \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{+\infty} (\lambda_k z)^p \text{(somme de } n\text{séries convergentes)} \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_k z} = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{z}-\lambda_k} = \boxed{\frac{1}{z}\frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\chi\left(\frac{1}{z}\right)}}
\end{aligned}$$

en effet, étant donné que $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, alors, $\chi_A' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1,\, i\neq k}^{n}(X-\lambda_i)$, ainsi, $\dfrac{\chi_A'(X)}{\chi_A(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_k}$.

Exercice n°25 RMS Mines PC 2017

Soit A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CA$, $BC = CB$ et $AB - BA = C$. Montrer que A, B et C ont un vecteur propre commun.

Solution :

On notera a, b et c les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à A, B et C respectivement.

Préliminaire : Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$, alors A et B ont un vecteur propre commun.
En effet a a au moins une valeur propre λ (car son polynôme caractéristique appartient à $\mathbb{C}[X]$) ; comme a et b commutent, $E_\lambda = \mathrm{Ker}(a - \lambda \mathrm{Id})$ est stable par b. L'endomorphisme $\widetilde{b}$ induit par b sur E_λ admet au moins

un vecteur propre x, qui est un vecteur propre commun de a et b.
Retour au cas de l'exercice : On suppose d'abord que C n'est pas inversible. Alors $F = \mathrm{Ker}(c) \neq \{0\}$ et comme c commute avec a et b, F est stable par a et b. Si on note $\widetilde{a}$ et $\widetilde{b}$ les endomorphismes induits par a et b respectivement sur F, alors $\widetilde{a}\widetilde{b} - \widetilde{b}\widetilde{a} = 0_{\mathcal{L}(F)}$. On peut utiliser le préliminaire, $\widetilde{a}$ et $\widetilde{b}$ ont un vecteur propre commun x. x est un vecteur propre de a, b et aussi de c car $x \in \mathrm{Ker}(c)$ et $x \neq 0$.
On prouve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{P}(k) \ : \ A^kB - BA^k = kA^{k-1}C$$

- $\mathcal{P}(k)$ est vrai ;
- si $\mathcal{P}(k)$ est vrai pour un entier k fixé, alors

$$A^{k+1}B = ABA^k + kA^kC = (BA + C)A^k + kA^kC = BA^{k+1} + CA^k + kA^kC = BA^{k+1} + (k+1)A^kC$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est vrai.
Montrons par l'absurde que C n'est pas inversible :
Supposons que C est inversible. Alors, en utilisant une $\| \ \|$ norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \ \|MN\| \leqslant \|M\|\|N\|$$

(il en existe (...)), on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$A^{k+1}B - BA^{k+1} = (k+1)A^kC$ donc $(k+1)A^k = A^{k+1}BC^{-1} - BA^{k+1}C^{-1}$, d'où

$$(k+1)\|A^k\| \leqslant 2\|A^{k+1}\|\|B\|\|C^{-1}\| \leqslant 2\|A^k\|\|A\|\|B\|\|C^{-1}\|$$

Si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k \neq 0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $k + 1 \leqslant 2\|A\|\|B\|\|C^{-1}\|$, ce qui est impossible. Ainsi il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$.
Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ A^k = 0\}$. On a

$$A^{k_0}B - BA^{k_0} = k_0A^{k_0-1}C$$

donc $A^{k_0-1}C = 0$. C étant inversible, $A^{k_0-1} = 0$, ce qui est en contradiction avec la définition de k_0.
Ainsi C est inversible et A, B et C ont un vecteur propre commun.
Exercice non faisable sans questions intermédiaires.

Exercice n°26 RMS 2017 n°904 : Mines PC

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Déterminer les B telles que $B^2 = A$.

Solution :

Le polynôme caractéristique vaut $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 + 7\lambda - 8$.

Les valeurs propres sont donc 1 et -8 (1 est racine évidente, le produit vaut -8...).

$B^2 = A \Leftrightarrow B^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}B^2P = D \Leftrightarrow \left(P^{-1}BP\right)^2 = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

En posant $M = P^{-1}BP$, on est ramené à résoudre $M^2 = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Or une telle matrice commute avec D : $MD = D^3 = DM$.

Or les seules matrices qui commutent avec une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts sont les matrices diagonales (simple calcul avec une matrice 2×2 !)

Donc M est diagonale : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C} / \ M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Alors $M^2 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \{-1, 1\} \\ \beta \in \{-2i\sqrt{2}, 2i\sqrt{2}\} \end{cases}$

Les solutions sont donc les matrices $P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2i\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, matrice diagonalisant A...

Remarques :

– nous avons établi que B et A sont codiagonalisables...

– Cet exercice se généralise en taille $n \times n$ pour une matrice A à valeurs propres distinctes 2 à 2 (donc diagonalisable à valeurs propres distinctes)

– Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cette équation n'a pas de racine...

– on a ici une équation matricielle polynômiale de degré 2 ayant 4 racines distinctes...

Exercice n°27 Mines PC 17-retour élève

Déterminer la dimension maximale d'un sev F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne contient que des matrices diagonalisables .

Questions posées au cours de l'oral :

Quels sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ connaissez vous qui ne contiennent que des matrices diagonalisables ?

En déduire un minorant de $\dim F$ *si F est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables de dim maximale*

Solution :

S_n est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables et $\dim(S_n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Si F répond à la question $\dim(F) \geq \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Soit F répondant à la question et soit T_n le sev des matrices triangulaires supérieures à diagonale nulle.

Si $A \in F \cap T_n$, A est diagonalisable et sa seule valeur propre est 0 donc $A = 0$.

F et Tn sont en somme directe. De plus $\dim(T_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On a $\dim(F \oplus T_n) = \dim(F) + \dim(T_n) \geq \dfrac{n(n+1)}{2} + \dim(T_n) = n^2$

Comme $\dim(F \oplus T_n) \leq n^2$ on a $\dim(F) = n^2 - \dim(T_n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

De plus comme S_n convient, cette dimension est bien la dimension maximale des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

Exercice n°28 RMS 2017 n°985 Centrale

Soit, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = (\operatorname{tr} M)I_n - M$.

1. Montrer que φ est diagonalisable.
2. Calculer $\det \varphi$.

Solution :

1. On cherche (λ, M) avec M non nul tel que $\varphi(M) = \lambda M$ soit $(\operatorname{tr} M)I_n = (\lambda + 1)M$.
   Si $\lambda + 1 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -1$ alors $\operatorname{tr} M = 0$. L'espace propre est alors de dim $n^2 - 1$.
   Si $\lambda + 1 \neq 0$, en utilisant $M = I_n$, $\lambda = n - 1$. L'espace propre est de dimension 1.
   Ainsi φ est diagonalisable.
2. En utilisant les valeurs propres obtenues, $\det \varphi = (-1)^{n^2-1}(n-1) = (-1)^{n-1}(n-1)$ car n^2 et n sont de même parité.

Exercice n°29 RMS 2017 n°776 : Mines

Soit $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $q(X) = {}^tXHX$.

1. Montrer que H est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de H sont strictement positives et que H est inversible.

3. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $a_n\|X\|_2^2 \leqslant q(X) \leqslant b_n\|X\|_2^2$ où a_n est la plus petite valeur propre de H et b_n la plus grande.

Solution :

1. H est symétrique réelle donc ortho-diagonalisable.
2. $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 x^{i-1+j-1}dx$. Donc H est la matrice des produits scalaires dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc $q(X) > 0$ pour $X \neq 0$. Avec X un vecteur propre associé à la valeur propre λ, on obtient $q(X) = \lambda\|X\|_2^2$ soit $\lambda > 0$.
   En particulier, 0 n'est pas vp de H : H est inversible.
3. D'après la première question, $H = {}^tPDP$ avec P orthogonale et D diagonale.
   Donc $q(X) = {}^t(PX)D(PX) = {}^tYDY = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$. En minorant λ_i par a_n et en le majorant par b_n, on trouve que $a_n\|Y\|_2^2 \leqslant q(X) \leqslant b_n\|Y\|_2^2$.
   On conclut en observant que $\|X\|_2^2 = \|Y\|_2^2$.

Exercice n°30

Soit, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\phi(M) = (trM)\ I_n - M$.
a) Montrer que ϕ est diagonalisable.
b) Calculer $\det \phi$.

Solution :

a) Notons H l'ensemble des matrices de trace nulle. C'est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est le noyau de l'application linéaire trace.
Notons $F = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$, l'ensemble des matrices d'homothétie ou encore la droite vectorielle engendrée par la matrice I_n.
Toute matrice M se décompose de manière unique en une matrice de F et une matrice de H de la manière suivante : $M = \dfrac{trM}{n}I_n + (M - \dfrac{trM}{n}I_n)$.
On en déduit que F et H sont supplémentaires, il s'ensuit que H est un hyperplan et est donc de dimension n^2-1.
Par ailleurs, si $M \in F$ alors $M = \lambda I_n$ et $\phi(M) = (n-1)M$.
Si $M \in H$ alors $\phi(M) = -M$.
Or $E = F \oplus H$, on a donc décomposé E en somme directe de sous-espaces propres de ϕ. Par conséquent, ϕ est diagonalisable.
b) D'après ce qui précède, $n-1$ est valeur propre d'ordre 1 et -1 est valeur propre d'ordre n^2-1.
On en déduit que $\det \phi = (-1)^{n^2-1}(n-1) = (-1)^{n-1}(n-1)$ car n et n^2 ont même parité.

Exercice n°31 Mines-Pont 2017 : BEOS -3515

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où $(a_1, \cdots, a_n) \in I\!R^n$.

Solution :

◇ Si $(a_1, \cdots, a_n) = (0, \cdots, 0)$, alors A est nulle, donc diagonalisable.

◇ Si $a_n \neq 0$ et $(a_1, \cdots, a_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$, alors $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Donc A est diagonalisable.

◇ ⋆ S'il existe un entier i_0 de $[\![1, n-1]\!]$, $a_{i_0} \neq 0$, alors A est une matrice de rang 2 et $\text{Ima}(A) = \text{Vect}(e_n, \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i)$ et $\ker(A) = \text{Vect}\left(a_{i_0}e_1 - a_1 e_{i_0}, \cdots, a_{i_0}e_{n-1} - a_{n-1}e_{i_0}\right)$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $I\!R^n$.

Notons f l'endomorphisme de $I\!R^n$ dont la matrice dans la base canonique est A.

⋆ $\text{Ima}(f)$ est stable par f. Notons g la restriction de f à $\text{Ima}(f)$.

Alors g est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension 2, $\text{Ima}(f)$.

Or $\text{Ima}(A) = \text{Vect}(e_n, \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i)$. Et $f(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i + a_n e_n$ et $f(\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 e_n$.

Donc la matrice de g dans la base $\mathscr{B}' = (e_n, \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i)$ est $M = \begin{pmatrix} a_n & \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

⋆ Alors le polynôme caractéristique χ_g de g est $(X - a_n)X - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$, de discriminant $\Delta = a_n^2 + 4\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$.

Or $\Delta > 0$. Donc $\lambda_1 = \dfrac{a_n - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{a_n + \sqrt{\Delta}}{2}$ sont des valeurs propres distinctes de g, donc de f.

Et $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à λ_1 et $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à λ_2.

⋆ Donc $\lambda_1 e_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i$ et $\lambda_2 e_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

Alors la dimension de chaque sous espace propre est au moins égal à 1 et la dimension du noyau de f est égal à $n-2$.

Comme λ_1 et λ_2 sont non nulles, la dimension de $E(\lambda_1)$ et de $E(\lambda_2)$ est égale à 1.

Ainsi les valeurs propres de A sont exactement 0, $\lambda_1 = \dfrac{a_n - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{a_n + \sqrt{\Delta}}{2}$. Et $E(\lambda_1) = \text{Vect}(\lambda_1 e_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i)$ et $E(\lambda_2) = \text{Vect}(\lambda_2 e_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i)$ et $E(0) = \text{Vect}\left(a_{i_0}e_1 - a_1 e_{i_0}, \cdots, a_{i_0}e_{n-1} - a_{n-1}e_{i}\right.$

Exercice n°32 (Mines 2017)

Soit $E - \mathbb{K}$ esépace vectoriel de dimension finie n et u endomorphisme de E. On définit l'ensemble C_u de $\mathcal{L}(E)$ par

$$C_u = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}.$$

1. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. On suppose que u est diagonalisable dans $\mathbb{K}$. Quelle est la dimension de C_u ?

Solution :

1. Il est clair que C_u est non vide et stable par combinaisons linéaires et est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. On a vu en cours que : $v \in C_u$ implique que tout sous espace propre de u est stable par v.
   Réciproquement, on écrit que $E = \oplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$ donc $x \in E$ se décompose de maniére unique sous la forme $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$.
   $v(x_k) \in E_{\lambda_k}(u)$ car le sous espace est stable par v donc $u \circ v(x_k) = \lambda_k x_k$.
   On a aussi $v \circ u(x_k) = v(\lambda_k x_k) = \lambda_k v(x_k) = u \circ v(x_k)$.

Par linéarité de $u \circ v$ et $v \circ u$, on en déduit que $u \circ v(x) = v \circ u(x)$.

La dimension de C_u est alors $\sum_{k=1}^{p} m_k^2$.

Exercice n°33 Mines-Ponts PSI 2016 - BEOS UPS

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{GL}(E)$.
Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer l'équivalence :

$$f + g \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1.$$

Solution :

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Remarquons que $f + g = f(Id + g \circ f^{-1}) \circ f$ donc :

$$f + g \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow Id + g \circ f^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$$

On a également $\operatorname{rg}(g) = 1$ donc $\operatorname{rg}(g \circ f^{-1}) = 1$ (car f est bijective).
Ainsi 0 est valeur propre de multiplicité $m_0 \geqslant n - 1$ pour $g \circ f^{-1}$ qui admet comme dernière valeur propre $\lambda = \operatorname{tr}(g \circ f^{-1})$ afin que la somme des valeurs propres soit égale à la trace.
Donc $Id + g \circ f^{-1}$ admet 1 comme valeur propre de multiplicité $m_1 \geqslant n - 1$ et $1 + \operatorname{tr}(g \circ f^{-1})$ comme dernière valeur propre et finalement

$$Id + g \circ f^{-1} \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow 0 \notin \operatorname{Sp}(Id + g \circ f^{-1}) \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tr}(g \circ f^{-1}) \neq 0$$

Exercice n°34 ODLT - planche 106 - Mines Ponts 2017 - exo 2

Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel. On veut montrer que, si f^2 est diagonalisable, f l'est aussi si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

1. Montrer le sens direct
2. (a) On note λ une valeur propre non nulle de f^2, μ_1 et μ_2 ses racines.
   Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda Id) = \operatorname{Ker}(f - \mu_1 Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - \mu_2 Id)$.

   (b) Conclure

Solution :

On a toujours, quelque soit l'endomorphisme f, $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ ($x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^2$).

1. • Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f (qui existe car on suppose f diagonalisable).
   On note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée à e_i.
   Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f^2(e_i) = f(f(e_i)) = f(\lambda_i e_i) = \lambda_i f(e_i) = \lambda_i^2 e_i$, donc $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f^2.
   • Par suite, il existe $i_1, \ldots, i_k$ tels que $\operatorname{Ker} f^2 = E_O(f^2) = \operatorname{vect}(e_{i_1}, \ldots e_{i_k})$. alors $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k} \in \operatorname{Ker} f$ (car $\lambda_{i_j}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{i_j} = 0$), donc $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, donc, avec la remarque préliminaire, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
2. (a) **Analyse :** Soit $z \in \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda Id)$.
   S'il existe $a \in \operatorname{Ker}(f - \mu_1 Id)$ et $b \in \operatorname{Ker}(f - \mu_2 Id)$ tels que $z = a + b$, alors
   — $(f - \mu_1 Id)(z) = (f - \mu_1 Id)(a) + (f - \mu_1 Id)(b)$, donc $f(z) - \mu_1 z = f(b) - \mu_1 b$, donc $f(z) - \mu_1 z = (\mu_2 - \mu_1) b$ (car $b \in \operatorname{Ker}(f - \mu_2 Id) \Rightarrow f(b) = \mu_2 b$), donc, comme $\mu_2 - \mu_1 \neq 0$, $b = \dfrac{1}{\mu_2 - \mu_1}(f(z) - \mu_1 z)$.
   — De même, en composant par $f - \mu_2 Id$, on obtient $a = \dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2}(f(z) - \mu_2 z)$.

Synthèse : Réciproquement, si $a = \dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2}(f(z) - \mu_2 z)$ et $b = \dfrac{1}{\mu_2 - \mu_1}(f(z) - \mu_1 z)$, alors

$$\begin{aligned}
(f - \mu_1 Id)(a) &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}(f - \mu_1 Id)(f(z) - \mu_2 z) \\
&= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}(f^2(z) - (\mu_1 + \mu_2) f(z) + \mu_1 \mu_2 z) \\
&= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}(\lambda z - 0 f(z) - \lambda z) \quad \text{(car } \mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ sont les racines de } \lambda\text{, donc } \mu_2 = -\mu_1 \text{ et} \\
&= 0, \quad \text{donc } a \in \mathrm{Ker}(f - \mu_1 Id) \\
\text{et } (f - \mu_2 Id)(b) &= \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}(f - \mu_2 Id)(f(z) - \mu_1 z) \\
&= \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}(f^2(z) - (\mu_1 + \mu_2) f(z) + \mu_1 \mu_2 z) \\
&= 0, \quad \text{donc } b \in \mathrm{Ker}(f - \mu_2 Id) \\
\text{et } a + b &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}(f(z) - \mu_2 z) + \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}(f(z) - \mu_1 z) \\
&= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}(f(z) - \mu_2 z - f(z) + \mu_1 z) = z
\end{aligned}$$

Conclusion : Par analyse-synthèse, pour tout $z \in \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda Id)$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathrm{Ker}(f - \mu_1 Id) \times \mathrm{Ker}(f - \mu_2 Id)$ tel que $z = a + b$.
Enfin, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f - \mu_1 Id)$,

$$(f^2 - \lambda Id)(x) = (f - \mu_2 Id)((f - \mu_1 Id)(x)) = 0,$$

donc $\mathrm{Ker}(f - \mu_1 Id)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda Id)$.
De même, on montre que $\mathrm{Ker}(f - \mu_2 Id)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda Id)$.
On a donc bien

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda Id) = \mathrm{Ker}(f - \mu_1 Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu_2 Id).}$$

(b) Soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ un vecteur propre associé, alors $f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda^2 x$, donc λ^2 est une valeur propre de f^2.
On a donc ${}^{(}f) \subset \{\lambda : \lambda^2 \in^{(} f^2)\}$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu \in ^{(} f)} \dim(E_\mu(f)) &= \sum_{\mu^2 \in ^{(} f^2)} \dim(E_\mu(f)) \\
&\quad \text{(car si } \mu \in^{(} f)\text{, alors } \mu^2 \in^{(} f^2) \text{ et, si } \mu^2 \in^{(} f^2) \text{ et } \mu \notin^{(} f)\text{, alors } \dim E_\mu(f) = 0) \\
&= \sum_{\lambda \in ^{(} f^2)} \sum_{\mu : \mu^2 = \lambda} \dim E_\mu(f) \\
&= \dim E_0(f) + \sum_{\lambda \in ^{(} f^2) \setminus \{0\}} \sum_{\mu : \mu^2 = \lambda} \dim E_\mu(f) \quad \text{(si } 0 \notin^{(} f^2)\text{, } \dim E_0(f) = 0) \\
&= \dim E_0(f^2) + \sum_{\lambda \in ^{(} f^2) \setminus \{0\}} E_\lambda(f^2) \quad \text{(car } E_0(f) = \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 = E_0(f^2) \text{ et d'après la} \\
&= \sum_{\lambda \in ^{(} f^2)} E_\lambda(f^2) = \dim(E) \quad \text{(si } 0 \notin^{(} f^2)\text{, } \dim E_0(f^2) = 0),
\end{aligned}$$

donc f est diagonalisable.
Conclusion : Par double-implication, on a donc bien l'équivalence souhaitée.

Exercice n°35 Mines 2017

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on a $a_{ij} = j$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 0$).

1. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
2. A est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Cherchons valeurs et vecteurs propres de A en résolvant l'équation

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} 2x_2 + \cdots + nx_n = \lambda x_1 \\ x_1 + 3x_3 + \cdots + nx_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

On effectue l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geq 2$:

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} 2x_2 + \cdots + nx_n = \lambda x_1 \\ x_1 - 2x_2 = \lambda(x_2 - x_1) \\ \vdots \\ x_1 - nx_n = \lambda(x_n - x_1) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_2 + \cdots + nx_n = \lambda x_1 \\ (1+\lambda)x_1 = (\lambda+2)x_2 \\ \vdots \\ (1+\lambda)x_1 = (\lambda+n)x_n \end{cases}$$

Si $\lambda \in \{-1, -2, \ldots, -n\}$ ce système conduit à $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, donc λ n'est pas valeur propre. On peut donc maintenant supposer que $\lambda + k$ (pour $1 \leq k \leq n$) ne s'annule pas. Ce système est alors équivalent à :

$$x_k = \frac{\lambda+1}{\lambda+k} x_1 \quad \text{pour } 2 \leq k \leq n \qquad \text{et} \qquad (\lambda+1)\Big(\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{\lambda+k}\Big)x_1 = \lambda x_1$$

soit encore $\displaystyle\Big(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k}\Big)x_1 = 0$ et $x_k = \dfrac{\lambda+1}{\lambda+k}x_1$ pour $2 \leq k \leq n$.

Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k} \neq 1$ l'unique solution de ce système est $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$, donc λ est valeur propre de A ssi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k} = 1$.

2. Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k}$. On a $\displaystyle\lim_{x \to (-k)^-} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to (-k)^+} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

f étant continue, l'équation $f(x) = 1$ possède au moins une solution sur chacun des intervalles $]-n, -(n-1)[$, ... ,$]-2,-1[$, $]-1, +\infty[$, donc A possède au moins (et donc exactement) n valeurs propres réelles distinctes. Elle est donc diagonalisable.

Exercice n°36 Planche BEOS 3486 Centrale PC 2017

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nul. On pose $A = X^tX$.

1. Trouver le rang de A, ses valeurs propres, ses vecteurs propres.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. On remarque que ${}^t(A) ={}^t (X^tX) ={}^t ({}^tX)^tX = X^tX = A$, A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors, la k ème colonne de la matrice A est x_kX pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   * Ainsi, si $X = 0$, alors, le rang de A est 0.
   * Et, si $X \neq 0$, le rang de A est 1, car toutes les colonnes sont liées et l'une d'elle au moins n'est pas nulle.
   D'après le théorème du rang, on en déduit que la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est $n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$, si on note abusivement $\mathrm{Ker}(A)$ l'ensemble des matrices Y de $\mathcal{M}n, 1(\mathbb{R})$ tels que $AY = 0$.
   La matrice A s'écrit en colonne $(x_1X|x_2X|...|x_nX)$, étant donné qu'on est dans le cas où $X \neq 0$, l'un des x_i est différent de 0, supposons par exemple que ce soit x_1, alors, les opérations $L_k \to x_1L_k - x_kL_1$ donnent $(x_1X|0_{n,1}|...|0_{n,1})$.
   0 est donc valeur propre d'ordre de multiplicité au moins $n - 1$ de A.
   Ceci nous permet de conclure qu'une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est $((-x_2, x_1, ..., 0), (-x_3, 0, x_1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, -x$ puisque ces $n - 1$ vecteurs forment une famille libre (l'écriture de ces $n - 1$ vecteurs sous forme matricielle donne une matrice échelonnée de rang $n - 1$) de $n - 1$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(A)$ qui est de dimension $n - 1$.
   Il nous reste un valeur propre λ à trouver, or, la trace de A est $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lambda + 0 * (n - 1) \iff \lambda = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 ={}^t XX \neq 0$ car $X \neq 0$.
   De plus, $AX = X \underbrace{{}^tXX}_{=\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \left(= \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) X$ et $X \neq 0$, X est donc un vecteur propre associé à $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
   En conclusion,
   * si $X = 0$, $A = 0$ et,
   * si $X \neq 0$, le spectre de A est $\left\{0, \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right\}$ et une base de vecteurs propres est
   $$((-x_2, x_1, ..., 0), (-x_3, 0, x_1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, -x_n, x_1), (x_1, ..., x_n)).$$
2. Dans les deux cas $X \neq 0$ et $X = 0$, $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est donc diagonalisable}}$.

Exercice n°37 RMS Mines PC 2017

Soit $H = \left(\dfrac{1}{i + j - 1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $q(X) = {}^tXHX$.

1. Montrer que H est diagonalisable.

2. Montrer que les valeurs propres de H sont strictement positives et que H est inversible.
3. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $a_n\|X\|_2^2 \leqslant q(X) \leqslant b_n\|X\|_2^2$ où a_n est la plus petite valeur propre de H et b_n la plus grande.

Solution :

Soit $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $q(X) = {}^tXHX$.

1. H est une matrice symétrique réelle donc d'après le théorème spectral, H est diagonalisable.
   Plus précisément, il existe une matrice $P \in O(n)$ et une matrice diagonale D telles que $H = PD{}^tP$.

2. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$q(X) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{1}{i+j-1}\, x_i x_j$$

   On remarque que $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}dt$.
   On en déduit que

$$q(X) = \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i t^{i-1} x_j t^{j-1}\right) dt = \int_0^1 (x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1})^2 dt \geqslant 0$$

   De plus, si $q(X) = 0$, comme la fonction $t \mapsto (x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1})^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, elle est identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi le polynôme $x_1 + x_2 X + \cdots + x_n X^{n-1}$ a une infinité de racines (tous les réels de $[0,1]$) donc est égal au ploynôme nul. Ses coefficients sont tous nuls, c'est-à-dire $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
   On a prouvé que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $q(X) > 0$.
   Soit λ une valeur propre de H :
   il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $HX = \lambda X$.
   $q(X) = {}^tXHX = \lambda {}^tXX = \lambda\|X\|_2 > 0$ donc, X étant non nul, $\lambda > 0$.
   Les valeurs propres de H sont strictement positives. On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de H donc que H est inversible.

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En notant $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D, et $Y = {}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$q(X) = {}^tXHX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

   En notant a_n la plus petite valeur propre de H et b_n la plus grande,

$$a_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant q(X) \leqslant b_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$a_n\|Y\|_2^2 \leqslant q(X) \leqslant b_n\|Y\|_2^2$$

   Comm P est orthogonale, $\|Y\|_2^2 = {}^tYY = {}^tX{}^tPPX = {}^tXX = \|X\|_2^2$, d'où

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ a_n\|X\|_2^2 \leqslant q(X) \leqslant b_n\|X\|_2^2$$

Exercice n°38 RMS 2017 n°925 : Mines PC

Soient E un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On définit, pour $x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Montrer que f est un endomorphisme. Est-il injectif ? surjectif ?

Montrer qu'il est symétrique. A quelle condition est-il un projecteur ?

Solution :

• La linéarité vient de la bilinéarité du produit scalaire. Et f est bien à valeurs dans E...

• Cherchons son noyau : $\forall x \in E$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \langle x, e_i \rangle = 0$ car (e_i) base donc libre

Alors $x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in E^{\perp} = \{0\}$: $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et f est injective.

Endomorphisme en dimension finie, f est donc aussi surjective (bijective).

• $\forall (r, s) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle f(e_r), e_s \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_r, e_i \rangle \langle e_i, e_s \rangle$ qui du fait de la symétrie du produit scalaire vaut aussi $\langle e_r, f(e_s) \rangle$: f est symétrique.

• La question peut se poser car l'endomorphisme est symétrique (sinon la réponse serait évidente !)

f est un projecteur ssi $f \circ f = f$, i.e. ssi $\forall r \in [\![1, n]\!]$, $f(f(e_r)) = f(e_r)$

Or $f(f(e_r)) = f(e_r) \Leftrightarrow f(e_r) = e_r$ car f est injective.

Ceci étant vrai pour tout r, f est alors l'application identité (qui est bien une projection)

Remarque : On peut aussi voir que si c'est un projecteur, c'est sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$... valant respectivement E et $\{0\}$ car f est bijective (ou bien parce que la seule projection bijective est l'identité !)

Mais alors $\forall r \in [\![1, n]\!]$, $f(e_r) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_r, e_i \rangle e_i = e_r \Leftrightarrow \forall r \in [\![1, n]\!]$, $\begin{cases} \langle e_r, e_i \rangle = 0 & \text{si } i \neq r \\ \langle e_r, e_i \rangle = 1 & \text{si } i = r \end{cases}$

Donc f est une projection $\Leftrightarrow$ (e_i) est une base orthonormée, et f est alors l'identité.

Exercice n°39 Mines PC 16-retour élève

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs, montrer que :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Rque : Il me semblerait plus raisonnable d'admettre cette inégalité ....

2. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad X^T A X > 0$.
3. Montrer que $\det\,(A) \leq \left(\dfrac{\mathrm{Tr}\, A}{n} \right)^n$.
4. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.
5. Soit $D = \mathrm{diag}(\dfrac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{a_{n,n}}})$ et $B = DAD$. Montrer que $B \in S_n$ et que $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad X^T B X > 0$. Montrer finalement que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+^*$.
6. Montrer que $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Solution :

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Soit $S > 0$ et $g : (t_1, \ldots, t_n) \in K \mapsto \prod_{i=1}^{n} t_i$ sur $K = \{(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \,;\, \sum_{i=1}^{n} t_i = S\}$.

   La fonction g est continue sur le fermé borné K donc elle admet un maximum $M = g(a)$ où $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K$

   Comme g est positive, non nulle, les a_i sont strictement positifs .

En notant $U = (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$ et $\phi : (t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (S - (t_1 + \ldots + t_{n-1}))\prod_{i=1}^{n-1} t_i$, M est le maximum de ϕ sur U.

Comme ϕ est $\mathcal{C}^1$ et U ouvert, $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ est un point critique de ϕ.

En écrivant que $\nabla\phi(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \vec{0}$, on obtient $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{S}{n}$

$$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in K, \quad \prod_{i=1}^{n} t_i \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n = \left(\frac{t_1 + \ldots + t_n}{n}\right)$$

On en déduit l'inégalité demandée.

2. D'après le théorème spectral, en notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, il existe $P \in O_n$ telle que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

   $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad X^TAX = (P^TX)^TD(P^TX) = Y^TDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ en notant $Y = P^TX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

   C'est une somme de réels positifs donc $X^TAX \geq 0$. D'autre part , comme P^T est inversible et $X \neq 0$, $Y \neq 0$ donc il existe $j \in\in [\![1, n]\!]$ tel que $y_j \neq 0$.
   On a alors $X^TAX \geq \lambda_j y_j^2 > 0$.

3. $\det(A) = \det(D) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

   Les λ_i étant strictement positifs, d'après la question 1, $\det(A) \leq \left(\dfrac{\mathrm{Tr}\, A}{n}\right)^n$.

4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons $a_{i,j}$ les coefficients de A. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,i} =< Ae_i; e_i >= e_i^T Ae_i > 0$$

5. B est clairement une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad X^TBX = Z^TAZ$ avec $Z = DX$
   Comme D est inversible , $Z \neq 0$ et d'après Q2, $X^TBX = Z^TAZ > 0$.
   Soit α une valeur propre de B et X un vecteur propre associé. Par définition $X \neq 0$ et $X^TBX = \alpha X^TX = \alpha\|X\|^2$
   Comme $\|X\|^2 > 0$ et $X^TBX > 0$, on a $\alpha > 0$
   Comme $B \in S_n(\mathbb{R})$ ses valeurs propres sont réelles et donc $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+^*$.

6. D'après Q3, on a $\det(B) \leq \left(\dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{n}\right)^n$.

   Or $\det(B) = \det(A)\prod_{i=1}^{n} a_{i_i}$ et $\mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_{i,i}}{a_{i,i}} = n$ d'où le résultat.

Exercice n°40 RMS 2017 n°989 Centrale

1. Montrer que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit B_n le polynôme tel que, pour $x \in \mathbb{R}$, $B_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. Montrer que (B_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Solution :

1. Notons φ l'application.
   - $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Et $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.
     Et $\displaystyle\int_1^{+\infty}$ converge d'après le critère de Riemann. Ainsi φ est bien une forme.
   - La symétrie et la linéarité sont évidentes ainsi que la bilinéarité.
   - $\varphi(P,P)$ est positif et si $\varphi(P,P)=0$ alors par continuité et positivité de $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$, $\forall t \geqslant 0$, $P^2(t)e^{-t}=0$.
     D'où $\forall t \geqslant 0,\ P(t)=0$. Comme P est un polynôme, il n'a qu'un nombre fini de racines. Donc $P=0$.
2. D'après la formule de Leibniz,
   $B_n(x) = e^x \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}(-1)^{n-k}e^{-x}$.
   C'est-à-dire que B_n est un polynôme de degré n. Ainsi (B_n) forme une base.
   Soit $k<n$,
   $$\begin{aligned}\varphi(B_n,B_k) &= \int_0^{+\infty} B_n(t)B_k(t)e^{-t}\ dt\\ &= \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(t^ne^{-t})B_k(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(t^ne^{-t})B_k'(t)\ dt\end{aligned}$$
   De nouveau, grâce à la formule de Leibniz, $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(t^ne^{-t})$=$te^{-t}$ multiplié par un polynôme. Ainsi le crochet est nul. On peut donc itérer le résultat jusqu'à la dérivée k-ième de B_k qui est évidemment une constante que l'on factorise en dehors de l'intégrale.
   On obtient finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(t^ne^{-t})\ dt = \left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(t^ne^{-t})\right]$ qui vaut de nouveau 0 pour les mêmes raisons.

Exercice n°41 RMS 2017 n°775 : Mines

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que $p\,o\,q$ est un projecteur de E si et seulement si $p\,o\,q = q\,o\,p$.
3. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que le spectre de $p\,o\,q$ est inclus dans $[0,1]$.

Solution :

1. $\Rightarrow$: p est un projecteur orthogonal donc pour $x \in E$, il existe un unique couple $(y,z) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x=y+z$avec $\langle y,z\rangle = 0$. Et $p(x)=p(z)=z$ par caractérisation de $\operatorname{Im} p$. D'après le théorème de Pythagore, on a alors $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|p(x)\|^2$ soit $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   $\Leftarrow$: On considère $x = ty+z$ où y et z sont définis comme précédemment et y non nul. Alors $\|p(x)\| = \|z\|$ et $\|x\|^2 = t^2\|y\|^2 + 2t\langle y,z\rangle + \|z\|^2$.
   Comme $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}, t^2\|y\|^2 + 2t\langle y,z\rangle \leqslant 0$. C'est donc un polynôme du second degré de discriminant négatif ou nul. D'où $-\langle y,z\rangle^2 \leqslant 0$. Cela signifie que $\langle y,z\rangle = 0$ et le projecteur est bien orthogonal.
2. $\Rightarrow$: $p\,o\,q\,o\,p\,o\,q = p\,o\,p\,o\,q\,o\,q = p\,o\,q$ car p et q sont des projecteurs qui commutent.
   $\Leftarrow$:
   Résultat préliminaire : un projecteur orthogonal est symétrique. En effet, soit x et y deux éléments de E. $x = x-p(x)+p(x)$ avec $x-p(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $p(x) \in \operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$, de même pour y. D'où

$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.
$\|p\circ q(x)\| \leqslant \|q(x)\| \leqslant \|x\|$ d'après la première question. Ainsi, toujours d'après la première question, $p\circ q$ est un projecteur orthogonal. En utilisant le préliminaire, $p\circ q$ est symétrique. Dans une base orthonormée, la matrice A de p et la matrice B de q sont symétriques ainsi que AB.
D'où $AB = {}^t(AB) = {}^tB^tA = BA$ et p et q commutent.

3. Considérons (λ, x) un couple de valeur propre, vecteur propre de $p\circ q$. C'est-à-dire $p\circ q(x) = \lambda x$. Ainsi $x \in \operatorname{Im} p$. Grâce à sa caractérisation, on obtient $p(x) = x$
Donc $p(q(x) - \lambda x) = 0$. Cela signifie que $q(x) - \lambda x \in \operatorname{Ker} p$. Donc $\langle x, q(x) - \lambda x\rangle = 0$ ou encore $\langle q(x), q(x)\rangle - \lambda\langle x, x\rangle = 0$. Donc $\lambda \in [0, 1]$

Exercice n°42

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \to E$. On suppose que, pour tous x et y dans E, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Montrer que f est linéaire.

Solution :

Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Calculons

$$\begin{aligned}
||f(\lambda x) - \lambda f(x)||^2 &= \langle f(\lambda x) - \lambda f(x), f(\lambda x) - \lambda f(x)\rangle \\
&= \langle f(\lambda x), f(\lambda x)\rangle - 2\lambda \langle f(\lambda x), f(x)\rangle + \lambda^2 \langle f(x), f(x)\rangle \\
&= \langle \lambda x, \lambda x\rangle - 2\lambda \langle \lambda x, x\rangle + \lambda^2 \langle x, x\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
De même, soit x et y deux vecteurs de E,

$$\begin{aligned}
||f(x+y) - f(x) - f(y)||^2 &= \langle f(x+y) - f(x) - f(y), f(x+y) - f(x) - f(y)\rangle \\
&= \langle f(x+y), f(x+y)\rangle + \langle f(x), f(x)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle \\
&\quad -2\langle f(x+y), f(x)\rangle - 2\langle f(x+y), f(y)\rangle - 2\langle f(x), f(y)\rangle \\
&= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\quad -2\langle x+y, x\rangle - 2\langle x+y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. f est bien une application linéaire.

Exercice n°43 Mines 2017 - RMS 924

Soit E un espace euclidien et $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On définit, pour $x \in E$: $F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$

1. Montrer que F est un endomorphisme de E.
2. L'endomorphisme F est-il injectif ? surjectif ?
3. Montrer que F est symétrique.
4. A quelle condition F est-il un projecteur ?

Solution :

1. $\diamond$ $\forall x \in E$, $F(x) \in E$.

◇ $\forall (x,y)\in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x+\lambda y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle x+\lambda y, e_i\rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle x, e_i\rangle + \lambda\langle y, e_i\rangle\right) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle e_i \\ &= F(x)+\lambda F(y) \end{aligned}$$

Donc F est une application linéaire

Ainsi F est un endomorphisme de E.

2. ◇ Soit x un élément de $\ker(F)$.

   Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = 0$. Or la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.

   Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\langle x, e_i\rangle = 0$. Donc x est orthogonal à tout élément d'une base de E, c'est-à-dire x est orthogonal à E. Donc $x=0$.

   Ainsi $\ker(F)=\{0\}$. Donc F est injective.

   ◇ Comme F est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie E, F est surjective.

3. Soit $(x,y)\in E^2$.

$$\begin{aligned} \langle F(x), y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, y \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle \end{aligned}$$

Par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable et car $\langle x, e_i\rangle \in \mathbb{R}$

Ainsi $\langle F(x), y\rangle = \langle F(y), x\rangle$. Donc F est symétrique.

4. ◇ Si F est un projecteur, alors F est une projection sur $\mathrm{Ima}(F)$ parallèlement à $\ker(F)$.

   Or ici $\mathrm{Ima}(F)=E$. Donc F est l'identité.

   ◇ Si F est l'endomorphisme identité, alors F est un projecteur.

Exercice n°44 (Mines 2017)

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et B définie de E^2 dans $\mathbb{R}$ par $B(x=(u,v), y=(u',v')) = uu'-vv'$.

Soit $G=\{f\in\mathcal{L}(E),\ \forall (x,y)\in E^2,\ B(f(x),f(y))=B(x,y)\}$.

1. Montrer que G est stable par $\circ$.
2. Montrer que $G \subset \mathcal{GL}(E)$.
3. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $f\in G \iff {}^tMAM = A$.
4. Soit $f\in G$ canoniquement associé à $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Valeur du déterminant de M ? caractériser M, valeurs propres de M ? M est-elle diagonalisable si $\det M=-1$?

Solution :

1. Soit $(f,g) \in G^2$ et $(x,y) \in E^2$, alors $B((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = B(f(g(x)), f(g(y))) = B(g(x), g(y)) = B(x,y)$ car f puis g sont dans G donc G est stable par $\circ$.
2. Soit $f \in G$ et $x = (u,v) \in \mathrm{Ker} f$. Alors $f(x) = 0$ et $\forall y \in E$, $B(f(x), f(y)) = B(x,y) = 0$. Donc $\forall (u',v') \in E$, $uu' = vv'$. $u' = v' = 1$ donne $u = v$, $u' = 0$ et $v' = 1$ donne $v = 0$ donc $u = 0$ donc $x = 0$. Ainsi f est injective en dimension finie donc f est bijective. Par conséquent $G \subset \mathcal{GL}(E)$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $(x,y) \in E^2$ de colonnes X et Y. On remarque que $B(x,y) =^t XAY$. Alors

$$\forall (x,y) \in E^2,\ B(f(x), f(y)) = B(x,y) \iff \forall (X,Y)^t(MX)A(MY) =^t XAY =^t X^tMAMY =^t XAY.$$

Ainsi, puisque c'est vrai pour tout couple (X,Y) de colonnes, on obtient bien que $f \in G \iff {}^tMAM = A$.
4. Soit $f \in G$ canoniquement associé à $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On écrit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et

$${}^tMAM = A \iff a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1\ ab + cd = 0 \iff M \in O(2)$$

D'après le cours sur les matrices ortéhogonales 2×2, $\det M = \pm 1$ Les valeurs propres réelles de M sont incluses dans $\{1, -1\}$ et M est-elle diagonalisable si $\det M = -1$ (M est une symétrie orthogonale), sinon M est une matrice de rotation vectorielle.

Exercice n°45 Centrale PSI 2016

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1. Énoncer en entier le théorème spectral.
2. Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
3. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer alors qu'il existe O orthogonale et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

Solution :

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1. Théorème spectral :
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres : il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $D = {}^tPAP$.
2. On utilise le théorème spectral sur la matrice A, on note également $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ les valeurs propres de A.
Posons alors $B = P\Delta P^tP$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ ainsi

$$B^2 = P\Delta P^tP\Delta P^t = P\Delta^{2t}P = PD^tP = A$$

Ce qui prouve l'existence (l'unicité est également vraie mais bien plus difficile à prouver).
3. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Posons $A = {}^tMM$ on a de suite ${}^tA = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = A$ donc A est symétrique et donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A = {}^tMM$, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ et donc ${}^tXAX = \lambda^tXX$.
On a donc ${}^tXMMX = \lambda^tXX \Leftrightarrow \|MX\|^2 = \lambda\|X\|^2$ (pour la norme euclidienne).
On en déduit que $\lambda \geqslant 0$ mais comme $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc $\lambda > 0$. Finalement ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Il s'agit de la décomposition de Cartan d'une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ (hors programme mais se démontre en

exercice). On a vu que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc d'après le **2.** il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tMM$. Posons alors $O = MS^{-1}$, on a les relations $M = OS$ mais aussi

$${}^tOO = {}^tS^{-1}{}^tMMS^{-1} = {}^tS^{-1}S^2S^{-1} = {}^tS^{-1}{}^tSSS^{-1} = I_n$$

donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a ainsi prouvé l'existence d'un couple O orthogonale et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.
(l'unicité est également vraie mais plus technique à prouver)

Exercice n°46 ODLT - planche 100 - Mines Ponts 2017 - exo 2

1. Montrer l'existence et l'unicité de $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.
   Quel est son degré ?
2. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que (T_n) est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire.

Solution :

La correction de cet exercice repose en grande partie sur la formule trigonométrique suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

1. • Soit P et Q deux polynômes vérifiant :

   $$\forall x \in [0, \pi], \quad P(\cos x) = \cos(nx) \text{ et } Q(\cos x) = \cos(nx).$$

   Alors, pour tout $y \in [-1, 1]$, en posant $y = \cos x$, on a

   $$(P - Q)(y) = P(\cos x) - Q(\cos x) = 0.$$

   Le polynôme $P - Q$ a donc une infinité de racines, donc $P - Q$ est nul, donc $P = Q$.
   On a donc bien l'unicité.
   • Montrons l'existence par récurrence : posons HR_n : $\exists T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, $T_0 = 1$ convient, car, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\cos(0x) = 1$.
   Pour $n = 1$, $T_1 = X$ convient car, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\cos(1x) = \cos(x)$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \leq n$.
   Alors, pour tout $x \in [0, \pi]$, d'après la formule rappelée au début de l'exercice,

   $$\cos((n+1)x) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x) = 2\cos(x)T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x),$$

   donc $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ convient.
   Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que : $\forall x \in [0, \pi]$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
   De plus, par unicité (prouvée dans le premier point), on a, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.}$
   • Une récurrence immédiate permet, en partant de la relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, de prouver que,

   $$\forall n \geq 1, \quad \deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}.$$

2. • Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$.
   $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2(1-t)}}$, donc elle est intégrable sur $[0, 1[$.
   $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to-1}{\sim} \dfrac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2(1+t)}}$, donc elle est intégrable sur $]-1, 0]$.
   $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est donc intégrable sur $]-1, 1[$.
   Remarque :

— Rappelons que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$ (Riemann) et, ici, $\alpha = 1/2$.

— Si $P(1) = 0$ ou $Q(1) = 0$, l'équivalent en 1 n'est pas valable. Mais, dans ce cas, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{(1-t)^k R(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{(1-t)^{k-1/2}R(1)}{\sqrt{2}} \underset{t\to 1}{\to} 0$, donc $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $[0,1]$.
De même en -1.

• Pour tout $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle(\lambda P + Q), R\rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(\lambda P + Q)(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= \int_{-1}^1 \lambda\frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= \lambda\int_{-1}^1 \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{-1}^1 \frac{Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale convergente)} \\
&= \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle,
\end{aligned}$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.

• Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^1 \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \langle Q, P\rangle,$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.

• $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.

• Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale convergente (bornes dans le bon sens), donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positif.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$.
Comme $t \mapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$ et $-1 < 1$,

$$\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in]-1,1[,\ P(t) = 0.$$

Par suite, P a une infinité de racines, donc P est nul.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc défini.

• $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle T_n, T_n\rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Posons le changement de variable $t = \cos(\theta) \Leftrightarrow \theta = \arccos(t)$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant sur $]-1,1[$, donc il réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $]0,\pi[$. De plus, $dt = -\sin(\theta)d\theta$.
Enfin, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge, donc on peut effectuer le changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \int_\pi^0 \frac{(T_n(\cos\theta))^2}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos^2(n\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta}}\sin\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos^2(n\theta)}{\sin\theta}\sin\theta d\theta \quad (\text{car } \sin\theta \geq 0 \\
&= \int_0^\pi \cos^2(n\theta)d\theta = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2n\theta)}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2n\theta)}{4n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

La famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sera donc pas une base orthonormale!!!

• Pour $n=0$, $\langle T_0, T_0\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = [\arcsin(t)]_{-1}^{1} = \pi$.

• Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ avec $n\neq k$, on a, à l'aide du même changement de variable,

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_k\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{\pi}^{0} \frac{T_n(\cos\theta)T_k(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(k\theta)d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\cos((n-k)\theta)+\cos((n+k)\theta)}{2}dt \\ &= \left[\frac{\sin((n-k)\theta}{2(n-k)} + \frac{\sin((n+k)\theta)}{2(n+k)}\right]_0^{\pi} \quad (\text{car } n-k\neq 0 \text{ et } n+k\neq 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

• Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre (car de degrés échelonnés (ou car orthogonale)) formée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Par suite, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, en notant $n=\deg(P)$, P s'écrit comme combinaison linéaire de $(T_k)_{0\leq k\leq n}$, donc la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
De plus, elle est libre (car orthogonale (ou degrés échelonnés)), donc c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°47 Centrale 2017

Soit a, b, c des réels (avec $a\neq 0$) et $f(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice symétrique $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\langle AX \mid X\rangle = f(x,y)$.
2. Déterminer les extrémums de f à l'aide de A.

Solution :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c\end{pmatrix}$ convient.
2. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Ses valeurs propres sont les racines de $\chi_A(x) = x^2-(a+c)x+ac-\dfrac{b^2}{4} = (x-\lambda)(x-\mu)$ avec $\lambda = \dfrac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}$ et $\mu = \dfrac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}$.
   Notons $P\in\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ tel que $A = PDP^T$.
   Alors $f(x,y) = \langle PDP^TX \mid X\rangle = X^TPDP^TX = \langle DY \mid Y\rangle$ avec $Y = P^TX$. En posant $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}$ on montre que les extremums de f sont aussi ceux de $g : (x', y') \mapsto \lambda x'^2 + \mu y'^2$, avec $\lambda\mu = \dfrac{4ac-b^2}{4}$.
   — si $b^2-4ac>0$, λ et μ sont de signes contraires et f ne possède pas d'extremum;
   — si $b^2-4ac\leq 0$, λ et μ sont de mêmes signes; s'ils sont tous deux positifs alors $\min f = 0$ et f n'est pas majoré, s'ils sont tous deux négatifs alors $\max f = 0$ et f n'est pas minoré.

Exercice n°48 Planche BEOS 3241 Centrale PC 2017

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(i+t^2)}}{i+t^2}\mathrm{d}t$.
   Montrer qu'il existe un constante réelle K telle que $\forall x > 0,\ f'(x) = Ke^{-ix^2}$.

.

Solution :

1. Posons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$.
   La fonction $f : t \mapsto \cos(t^2)$ est continue par morceaux sur $\mathcal{R}_+$ comme composée de fonctions continues.
   Pour étudier la nature de I, il suffit donc d'étudier la nature $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$. On fait une intégration par parties en posant $u'(t) = 2t\cos(t^2)$, $v(t) = \dfrac{1}{2t}$, $u(t) = \sin(t^2)$, $v'(t) = -\dfrac{1}{2t^2}$.
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0, et enfin $u(1)v(1)$ existe.
   Ainsi, J est de même nature que $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{2t^2}\mathrm{d}t$.
   Or, $\left|\dfrac{\sin(t^2)}{2t^2}\right| \leq \dfrac{1}{2t^2}$ avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ intégrale de Riemann convergente car $2 > 1$.
   K est une intégrale absolument convergente, d'après le critère de comparaison pour l'intégrale de fonctions positives, K converge donc.
   En conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t \text{ est une intégrale convergente.}}$
2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(i+t^2)}}{i+t^2}\mathrm{d}t$.
   Posons $h : (x,t) \in \mathcal{R}_+^* \times \mathcal{R}_+ \mapsto \dfrac{e^{-x^2(i+t^2)}}{i+t^2}$.
   Soit $(a,b) \in (\mathcal{R}_+^*)^2$ avec $a \leq b$,
   — Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathcal{R}_+$ comme quotient de fonctions continues par morceaux avec un dénominateur qui ne s'annule pas.
     $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathcal{R}_+$, en effet,
     $|h(x,t)| = \dfrac{\left|e^{-x^2(i+t^2)}\right|}{|i+t^2|} = \dfrac{e^{-(xt)^2}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ puisque $|e^{-ix^2}| = 1$ et $|i+t^2| = 1+t^2$.
     Or, $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(1)$.
   — Pour tout $t \in \mathcal{R}_+$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ en tant que quotient de foncions de classe $\mathcal{C}^1$. Et, $\dfrac{\partial h}{\partial x}h(x,t) = -2xe^{-x^2(i+t^2)}$.
   — Hypothèse de domination :
   $$\forall t \in \mathcal{R}_+,\ \forall x \in [a,b],\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}h(x,t)\right| = \left|-2xe^{-x^2(i+t^2)}\right| = 2xe^{-(xt)^2} \leq 2be^{-(at)^2} \underset{\text{notation}}{=} \varphi(t).$$
   Or, φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathcal{R}_+$, puisque $t^2\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \iff \varphi(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ et φ continue par morceaux sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$.

Donc, d'après le **théorème de dérivation des intégrales à paramètres**, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, b] \subset \mathcal{R}_+^*$,

$\boxed{f \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{R}_+^*}$, et d'après la **formule de Leibniz**, $\forall x > 0,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2(i+t^2)}\mathrm{d}t.$

On obtient, $f'(x) = -2e^{-ix^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(xt)^2} x\mathrm{d}t.$

Posons $u = xt$, $t \mapsto xt$ est une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{R}_+$ sur $\mathcal{R}_+$ et $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}t$.

Ainsi, $f'(x) = -2e^{-ix^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u.$

Or, $u \mapsto e^{-u^2}$ est continue par morceaux sur $\mathcal{R}_+$ et intégrable sur $\mathcal{R}_+$, puisque $u^2 e^{-u^2} \underset{u\to+\infty}{\to} 0 \iff e^{-u^2} = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ avec $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ et, $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ continue par morceaux donc intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, si on pose $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$, on obtient qu'il existe un constante réelle K telle que $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = K}$

Exercice n°49 RMS Mines PC 2017

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^{x+1}}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^{x+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est décroissante sur D. Calculer $f(1)$.
2. Montrer, pour $x > 0$, que $g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1 + u)}$.

   En déduire que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x}$.

Solution :

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^{x+1}}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^{x+1}}$.

1. La fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{1}{1 + t + t^{x+1}}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

   - si $x < 0$, alors $\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt$ diverge ;
   - $\varphi_0(t) = \dfrac{1}{2 + t}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_0(t)dt$ diverge ;
   - si $x > 0$, alors $\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ et $x + 1 > 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt$ converge.

   Ainsi le domaine de définition de f est $D =]0, +\infty[$.

   Soit $(x, y) \in D^2$, tel que $x \leqslant y$: $\forall t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{1 + t + t^{x+1}} \geqslant \dfrac{1}{1 + t + t^{y+1}}$ donc $f(x) \geqslant f(y)$. f est décroissante sur D.

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2. On montre de même que pour f que le domaine de définition de g est $]0, +\infty[$.

En faisant le changement de variable $u = t^x$ (justifier), on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{xt^{x-1}}{t^{x-1}(t+t^{x+1})}dt \\ &= \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{xt^{x-1}}{t^x+t^{2x}}dt \\ &= \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)} \end{aligned}$$

d'ou $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln 2}{x}$.

On a pour tout $x > 0$:

$$g(x) - f(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t+t^{x+1}} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\right) dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})}\right) dt$$

Comme $\forall t > 0,\ (t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1}) \geqslant t^2$,

$$0 \leqslant g(x) - f(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} = 1$$

$h = f - g$ est bornée donc négligeable devant $g : x \mapsto \dfrac{\ln 2}{x}$ au voisinage de 0.

Comme $f = g + o(g)$, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x}$.

Exercice n°50 Odlt 2017 Pl n° 100-1 : Mines PC

Domaine de définition, continuité, dérivabilité et limites aux bornes de $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt$.

Solution :

On établit sans peine que F n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-^*$: $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \geq 1$ pour t assez grand car cette fonction tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Puis on montre en même temps la définition et la continuité par le thm de continuité des intégrales à paramètres :

- Soit $f : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \in \mathbb{R}$. Alors :
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
  - Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  - **Hypothèse de domination :** Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on a $|f(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (une primitive de φ est arctan, et, arctan tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$)

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\boxed{F \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+}$.

- Montrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
  - Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
  - **Hypothèse de domination LOCALE :** $\forall a > 0$, $\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\mathrm{e}^{-at}$

La fonction $\varphi : t \mapsto t\mathrm{e}^{-at}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car c'est un o en $+\infty$ de $1/t^2$...)

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\boxed{F \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

• Limite en 0 : $F(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ d'après la remarque précédente sur φ !

• Limite en $+\infty$: Deux méthodes, la seconde plus savante que l'autre !

a) On remarque que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, positive, on en déduit (thm de la limite monotone) que $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \ell$ existe et est positive...

Il ne reste plus qu'à la calculer en utilisant la composition des limites : ℓ vaut aussi $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$, que l'on calcule par convergence dominée... cf la seconde méthode :

b) On introduit une suite quelconque (x_n) de réels positifs vérifiant $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Notons $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(x_n, t)$. On a :

– f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$,

– Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $f_n(t_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_0 > 0 \\ 1 & \text{si } t_0 = 0 \end{cases}$

Donc (f_n) converge simplement vers f, et f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de convergence dominée, $F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Alors , par la **caractérisation séquentielle** de la limite (et plus seulement la composition comme dans la première méthode où $x_n = n\ldots$), on a établi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$.

Exercice n°51 Mines PC 17-retour élève

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cpm, décroissante et non intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cpm, périodique de période $T > 0$ et telle que $a = \displaystyle\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.

Montrer que fg est non intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Solution :

Soit $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme $fg \geq 0$, $\quad H$ est croissante donc admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$ et fg est intégrable si et seult si $L \in \mathbb{R}$.

Or $L = \lim\limits_{n\to+\infty} H(n)$ et $H(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ où $u_k = \displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} (f(t)g(t))\,\mathrm{d}\,t$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} H(n) \in \mathbb{R}$ si et seult si la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.

Comme f est décroissante , g T-périodique, f et g positives,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq f((n+1)T) \int_{nT}^{(n+1)T} g(t)\,\mathrm{d}t = af((n+1)T)$$

D'autre part, g est positive et $a \neq 0$ donc $a > 0$.

La fonction $\varphi : t \mapsto f(tT)$ est cpm, décroissante, positive sur $[0, +\infty[$ donc la série $\sum \varphi(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$ converge.

Par le changement de variable affine $\mathcal{C}^1$ bijectif $x = tT$,

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$ a même nature que l'intégrale $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ qui diverge puisque f n'est pas intégrable.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \varphi(n)$ diverge donc $\sum u_n$ diverge par comparaison

On en déduit que $L = \lim\limits_{n\to+\infty} H(n) = +\infty$: la fonction fg n'est donc pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice n°52 RMS 2017 n°1021 Centrale

On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}\, dt$.

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Déterminer la limite de f' en $+\infty$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Calculer f''.
3. Etablir une équation différentielle satisfaite par f. Trouver f.

Solution :

1. — Pour $t \geqslant 0$, $x \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   — Pour $x \geqslant 0$, $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   — $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2 \left|\dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ et cette dernière fonction est bien positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$

   On peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre : f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et l'intégrale converge.

   Pour le caractère $\mathcal{C}^1$,

   — Pour $t \geqslant 0$, $x \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

   — Pour $x \geqslant 0$, $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable (on vient de le démontrer).

   $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\sin(xt)}{1+t^2} = \dfrac{t\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

   — Mais il n'est pas possible de majorer.

   On modifie donc l'écriture de f grâce à une IPP pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\, dt &= \left[\frac{1}{1+t^2}\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\frac{-\cos(xt)}{x}\, dt \\ &= \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\frac{\cos(xt)}{x}\, dt\end{aligned}$$

   La dérivée partielle par rapport à x est $\dfrac{-\cos(xt) - tx\sin(xt)}{x^2}$.

   Les deux premières conditions d'application du théorème de dérivation restent valables. Ensuite, on considère $a > 0$.

   Pour $x \geqslant a$, $\left|\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\dfrac{-\cos(xt)-tx\sin(xt)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{t}{a}\right)$.

   La fonction majorante est bien positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\frac{\cos(xt)+tx\sin(xt)}{x^2}\, dt$$

   Ensuite $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\, dt + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\, dt$ Comme les deux intégrales convergent, f' tend vers zéro en $+\infty$.

2. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\frac{\cos(xt)}{x^2}\, dt + \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\frac{\sin(xt)}{x}\, dt$

   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\frac{\cos(xt)}{x^2}\, dt = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}f(x)$ d'après la première question.

   Et $\dfrac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{2t^2+2}{(1+t^2)^2} - \dfrac{2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{2}{(1+t^2)} - \dfrac{2}{(1+t^2)^2}$

   D'où $f'(x) = -\dfrac{1}{x}f(x) + \dfrac{2}{x}f(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t^2)^2}\frac{\sin(xt)}{x}\, dt$.

Soit $xf'(x)-f(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t^2)^2}\sin(xt)\,dt$.
Les conditions de régularité par rapport à x et t de l'intégrande sont vérifiées.
La dérivée partielle par rapport à x est $t\cos(xt)$ et on peut majorer par $\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$.
La fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x)+xf''(x)-f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\cos(xt)\,dt = xf(x)-1$$

Finalement $f''(x)-f(x) = -\dfrac{1}{x}$ grâce à la première IPP sur f.
On ne peut résoudre cette équation différentielle : il y a donc une erreur d'énoncé.
Si on considère $\cos(xt)$ au lieu de $\sin(xt)$, l'équation différentielle obtenue en utilisant les mêmes techniques est $f''-f=0$ sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.
On obtient $\alpha e^x+\beta e^{-x}$. Grâce à la limite de f' en $+\infty$, on obtient $\alpha=0$ et la valeur en 0 fournit $f(x)=\dfrac{\pi}{2}e^{-x}$.
Si on considère $\dfrac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}$ au lieu de $\dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}$, l'équation différentielle est alors $f-f''=\dfrac{\pi}{2}$ et $f(x)=\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-x})$.

Exercice n°53 RMS 2017 n°830 : Mines (Début de Centrale 2, MP, 2016)

Soit $F : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
2. Déterminer les limites de F, F' et F'' en $+\infty$.
3. Exprimer $F(x)$ pour $x\in\mathbb{R}^{+\star}$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

Solution :

1. — $t\mapsto f(x,t) = e^{-xt}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est positive.
   Pour $x<0$, elle diverge vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.
   Pour $t>0$, $x\mapsto e^{-xt}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour $x\geqslant 0$, $t\mapsto e^{-xt}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   Elle possède une limite finie en 0 de valeur $\dfrac{1}{2}$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0.
   $\forall x\geqslant 0, \forall t>0,\ \left|e^{-xt}\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge d'après le critère de Riemann.
   Ainsi, F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
   — Reprenons les conditions :
   Pour $t>0$, $x\mapsto e^{-xt}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}\dfrac{\cos t-1}{t}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = e^{-xt}(1-\cos t)$
   $t\mapsto e^{-xt}\dfrac{\cos t-1}{t}$ et $t\mapsto e^{-xt}(1-\cos t)$ sont continues sur $]0,+\infty[$.
   Pour $x>0$, $e^{-xt}\dfrac{\cos t-1}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Enfin, soit $a>0$. Pour $x\geqslant a$ et $t>0$, $\left|e^{-xt}(1-\cos t)\right| \leqslant e^{-at}(1-\cos t)$ qui est positive, continue, et pour les mêmes raisons que précédemment, intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Finalement F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

2. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à chaque fois.
   Soit $(x_n)_n$ de limite $+\infty$ en $+\infty$.
   On considère $f_n(t) = e^{-x_nt}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$, $g_n(t) = e^{-x_nt}\dfrac{\cos t - 1}{t}$ et $h_n(t) = e^{-x_nt}(1-\cos t)$.
   Pour $t > 0$, f_n, g_n et h_n convergent simplement vers la fonction nulle.
   Comme x_n tend vers $+\infty$, il existe un rang pour lequel $x_n \geqslant 1$.
   Ainsi $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}\dfrac{1-\cos t}{t^2}$, $|g_n(t)| \leqslant e^{-t}\dfrac{1-\cos t}{t}$ et $|h_n(t)| \leqslant e^{-t}(1-\cos t)$.
   Les fonctions majorantes sont bien continues par morceaux, positives et intégrables.
   Donc F, F' et F'' ont pour limite 0 en $+\infty$.

3. $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos t)\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\ dt$ car les deux premières intégrales convergent.

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt = \frac{1}{x} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\ dt = Re\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\ dt = Re(\frac{1}{x-i})$$

   Donc $F''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$.
   Puis, pour $x > 0$, $F'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
   Il reste à réaliser une intégration par partie pour trouver une primitive de $\ln(x^2+1)$

$$\int 1 \times \ln(x^2+1)\ dx = [x\ln(x^2+1)] - \int \frac{2x^2}{x^2+1} = [x\ln(x^2+1)] - \int 2 + \int \frac{2}{x^2+1}\ dx$$

   Ainsi $F(x) = x\ln x - x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) + x - \arctan x + C$
   Grâce à la limite de F en $+\infty$, on trouve $C = \dfrac{\pi}{2}$.

4. La limite de F en 0 est $\dfrac{\pi}{2}$ par croissances comparées.
   Par continuité de F en 0,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\ dt = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$$

Exercice n°54

Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Solution :

f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. En 0, $f(t) \sim \ln t$ donc f est négative au voisinage de 0 et est équivalente à une fonction intégrable (par exemple parce que $\ln t = o(t^{-1/2})$) par croissance comparée. Donc f est négligeable devant une fonction intégrable d'après Riemann. Par conséquent f est intégrable au voisinage de 0.

En $+\infty$, f est positive.
De plus, $t^{3/2}f(t) \sim \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}} \to 0$ lorsque t tend vers l'infini.
Donc f est négligeable devant $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ qui une intégrale de Riemann convergente.
On peut donc conclure à l'intégrabilité de f.

Pour calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$, posons $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$.
D'après la relation de Chasles, on obtient $J + K = I$.
Par ailleurs, dans K, posons $x = 1/t$ qui est une bijection de $[1, \infty[$ dans $]0, 1]$ de classe $C1$. On obtient : $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\frac{du}{u^2} = \int_0^1 f(t)dt = -J$. Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 0$

Exercice n°55 Mines-Pont 2017 : BEOS -3516

Pour tout x dans $]0,+\infty[$, prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Solution :

Considérons les fonctions $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\,dt$ et $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrons que ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et de dérivées égales. En étudiant leur limite en 0, nous pourrons montrer qu'elles sont égales sur $]0,+\infty[$.

◇ • Pour tout réel x strictement positif, la fonction $\varphi_x : t \longmapsto \dfrac{arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Et $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ |\varphi_x(t)| \leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$. Or la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Donc par critère de comparaison, φ_x est intégrable sur. $]0,+\infty[$.

• Pour tout réel t strictement positif, la fonction $\varphi_t : x \longmapsto \dfrac{arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Et $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi_t'(x) = \dfrac{1}{t(1+t^2)\left(1+\left(\frac{x}{t}\right)^2\right)} = \dfrac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$.

• Soit a un réel strictement positif.

$\forall t \in]0,1],\ \forall x \in [a,+\infty[,\ |\varphi_t'(x)| \leqslant \dfrac{t}{a}$. Et la fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{a}$ est une fonction indépendante de x, continue et intégrable sur $]0,1[$.

$\forall t \in [1,+\infty[, \forall x \in [a,+\infty[,\ |\varphi_t'(x)| \leqslant \dfrac{1}{t^3}$. Et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3}$ est une fonction indépendante de x, continue et intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi pour tout réel a strictement positif, f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.
Finalement f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
et $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Soit x un élément de $]0,+\infty[\backslash\{1\}$.
Or $\forall t \in]0,+\infty[,\ \dfrac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{t}{x^2+t^2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } f'(x) &= \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\ln(x)}{x^2-1}
\end{aligned}$$

◇ • La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t^2}$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[\backslash\{1\}$.

• Or $\dfrac{\ln(t)}{1-t^2} = \dfrac{\ln(t)}{1-t}\dfrac{1}{1+t}$.

Comme $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable en 1, $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$ admet une limitée en 1. Donc La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t^2}$ est prolongeable par continuité en 1.

• Or $\dfrac{-\ln(t)}{1-t^2} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$. Et $t \longmapsto -\ln(t)$ est intégrable et positive sur $]0,1[$. Donc $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t^2}$ est intégrable sur $]0,x[$ pour tout réel x strictement positif.

Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[\backslash\{1\},\ g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{1-x^2}$.

◇ Ainsi f' et g' coïncident sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et par continuité sur $]0,+\infty[$.
Donc f et g sont égales à une constante près sur $]0,+\infty[$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.
Et f est définie et continue en 0, car $\forall x \in [0,+\infty[$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ et $t \longmapsto \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ est indépendante de x, continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Finalement f et g sont égales sur $[0,+\infty[$.

Exercice n°56 ODLT - planche 103 - Mines Ponts 2017 - exo 2

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer explicitement F'.
   On pourra chercher a et b réels tels que $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{a}{1+t^2} + \dfrac{b}{1+x^2t^2}$.
3. Calculer F sur D.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$ converge et calculer sa valeur.

Solution :

1. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

   • Comme la fonction arctan est bornée sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$.

   D'où, comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, (Riemann et $3>1$), $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

   • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt}{t} \underset{t\to 0}{\rightarrow} x$, donc $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est prolongeable par continuité en 0, donc $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0,1]$.

   Pour $x=0$, pour tout $t \in]0,1]$, $\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} = 0$, donc $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0,1]$.

   • Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui assure l'existence de $F(x)$.

   On a donc $D = \mathbb{R}$.

2. Posons $g : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$.
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf question 1)
   • Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car arctan l'est.
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{t(1+(xt)^2)(1+t^2)} = \dfrac{1}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{(1+(xt)^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec une primitive en arctan...).
• D'où F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right) dt \quad \text{(on doit avoir } 1-x^2 \neq 0 \text{, donc } x \neq \pm 1) \\
&= \frac{1}{1-x^2}\left[\arctan(t) - x\arctan(xt)\right]_0^{+\infty} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-x^2}\frac{\pi}{2}(1-x) & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{1-x^2}\frac{\pi}{2}(1+x) & \text{si } x < 0 = \frac{\pi}{2(1+|x|)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$$F'(1) = \lim_{x\to 1} F'(x) = \frac{\pi}{4} \text{ et } F'(-1) = \lim_{x\to -1} F'(x) = \frac{\pi}{4}.$$

La formule donnant $F'(x)$ est donc encore valable pour $x = \pm 1$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}.}$$

3. • Comme pour tout $x \geq 0$, $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) + C$.
Comme de plus $F(0) = 0$, on a $C = 0$.
• Comme pour tout $x \leq 0$, $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1-x)}$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \leq 0$, $F(x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) + C$.
Comme de plus $F(0) = 0$, on a $C = 0$.
• On a donc $\boxed{F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

4. $F(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.
Posons $u'(t) = \dfrac{\arctan t}{1+t^2}$, $u(t) = \dfrac{(\arctan t)^2}{2}$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ car arctan est bornée sur $\mathbb{R}$.
$u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2} \times \dfrac{1}{t} \underset{t\to 0}{\to} 0$.
De plus, $F(1)$ converge, donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}
F(1) &= \left[\frac{(\arctan t)^2}{2t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt,
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$ converge et vaut $2F(1) = \pi\ln(2)$.

Exercice n°57 Centrale 2017

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}\mathrm{e}^{-t^2} dt$. Existence et calcul de I_p.
2. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{I_p}{p!}$?
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)dt$.

Solution :

1. Au voisinage de $+\infty$, $t^{2p}\mathrm{e}^{-t^2} = O(\mathrm{e}^{-t})$ (croissances comparées) donc l'intégrale définissant I_p converge. Une intégration par parties donne la relation $I_p = \dfrac{2}{2p+1} I_{p+1}$ donc $I_p = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots(1)}{2^p} I_0 = \dfrac{(2p)!}{4^p p!}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
2. Le critère de d'Alembert ne donne rien mais la formule de Stirling donne $\dfrac{I_p}{p!} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{p}}$ donc la série $\displaystyle\sum \frac{I_p}{p!}$ diverge.
3. On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)dt = \int_0^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t)dt$ avec $f_p(t) = (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} t^{2p}\mathrm{e}^{-t^2}$.
   On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_p(t)|dt = \frac{x^{2p}}{(2p)!} I_p$. Cette fois le critère de d'Alembert prouve la convergence de $\displaystyle\sum \frac{x^{2p}}{(2p)!} I_p$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc le théorème d'interversion somme/intégrale s'applique et
   $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)dt = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_p(t)dt = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} I_{2p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^p = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-x^2/4).$$

Exercice n°58 Planche BEOS 2302 Mines Ponts PC 2016

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^2}$.
4. Montrer que f est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve. Pour la question 3. de l'exercice 1, on me rappelait la somme des $\frac{1}{n^2}$, on m'a fait passer par les termes pairs et impairs de la série, et on se servait de la série des $\frac{1}{n^2}$ pour trouver le réel a.

Solution :

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   Si $x_0 = 0$, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ diverge grossièrement.
   Si $x_0 \neq 0$, $\frac{(-1)^n}{1+n^2x_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2x_0^2}$.
   Or, si on pose $u_n(x_0) = \frac{(-1)^n}{1+n^2x_0^2} = (-1)^n v_n(x_0)$, avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(x_0) \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} |u_n(x_0)| = 0$, et $(v_n(x_0))$ est décroissante.
   $\sum_{n\geq 1} u_n(x_0)$ est donc une série alternée qui vérifie le théorème spécial des séries alternées, elle converge donc.
   En conclusion, $D_f = \mathbb{R}^*$.
2. On considère $x^2 f(x)$ que l'on écrit $g(1/x)$.
   L'objectif est de montrer que $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
   On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} . \frac{(-1)^n}{1+\frac{n^2}{x^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$. Cette dernière expression est valable en 0, donc, on vient de définir g y compris en 0.
   La recherche de la limite de $x^2 f(x)$ en $+\infty$ se ramène donc à la recherche de la limite de $\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Pour répondre à cette question, nous allons montrer que g est continue en 0.
   Posons, pour tout $n \in \mathcal{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, w_n est continue sur $\mathbb{R}$.
   — $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|w_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car c'est une série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$).
   $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$.
   Donc, par théorème de continuité des séries de fonctions, g est continue en 0 et $\lim_{x\to 0}(x) = g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Donc, $x^2f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

3. Nous sommes dans le cas d'une fonction définie sur $\mathcal{R}_+^*$, le théorème d'interversion série/intégrale d'une fonction continue sur un segment ne s'applique donc pas.
On pourrait essayer d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, mais,
$\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\right|\mathrm{d}t=\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+n^2t^2}\mathrm{d}t=\sum_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n}\arctan(nt)\right]_0^{+\infty}=\sum_{n\geq 1}\frac{\pi}{2n}$ diverge.
Appliquons donc le **théorème de convergence dominée** à $f_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.
— Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, u_k est continue par morceaux sur $\mathcal{R}_+$, en effet, $\left|\frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\right|\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2t^2}$ et $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, le critère de l'équivalent permet de conclure.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathcal{R}_+^*$,
— D'après la question 1., $\sum_{n\geq 1}u_n$, donc, (f_n) converge simplement vers f sur $\mathcal{R}_+^*$.
— Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $(a,b)\in(\mathcal{R}_+^*)^2$ avec $a<b$, si on pose $f_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, on obtient, pour tout $x\in[a,b]$, $|f(x)-f_n(x)|\leq|u_{n+1}(x)|\leq\frac{1}{1+(n+1)^2x^2}\leq\frac{1}{1+(n+1)^2a^2}\underset{n\to+\infty}{\to}0$. (f_n) converge donc uniformément vers f sur $[a,b]$.
Ainsi, $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans $\mathcal{R}_+^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $\mathcal{R}_+^*$, donc, f est continue sur $\mathcal{R}_+^*$, donc continue par morceaux sur $\mathcal{R}_+^*$.
— D'après le théorème sur les séries alternées qui s'applique comme vu plus haut, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $t\in\mathcal{R}_+^*$, $-f_n(t)|\leq|u_1(t)|=\frac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$.
Or, φ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathcal{R}_+^*$ comme vu au point précédent.
Ainsi, d'après **le théorème de convergence dominée**,

$$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty}u_k(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}u_k(t)\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty}u_k(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+k^2t^2}\mathrm{d}t=\left[\frac{(-1)^k}{k}\arctan(kt)\right]_0^{+\infty}=\frac{(-1)^k\pi}{2k}$.

En conclusion, $\boxed{\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\pi}{2k}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}}=\frac{-\ln(2)\pi}{2}$ si l'on sait que $\ln(2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$
ce qui mériterait d'être prouvé !

Exercice n°59 RMS Mines PC 2017

Soit $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?

Solution :

Soit $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$.

1. • Si $x \geqslant 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Comme $3/2 > 1$, la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge ; $f(x)$ est défini.
   • Si $x \geqslant 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}} = +\infty$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.
   Le domaine de définition de f est $D = [0, +\infty[$.
2. Soit $f_n : x \geqslant 0 \mapsto \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty^D \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc unifomément sur D.
   On en déduit que f est continue sur D.
3. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et
$$\forall x > 0,\ f_n'(x) = -\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$$
   • La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
   • Pour tour $a > 0$ on a
$$\forall x \in [a, +\infty[,\ |f_n'(x)| \leqslant \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n}$$
   donc
$$\|f_n'\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n}$$
   Or $\dfrac{e^{-a\sqrt{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série de terme général $\dfrac{e^{-a\sqrt{n}}}{n}$ converge.
   Ainsi la série la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement donc unifomément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ donc sur tout segment de $]0, +\infty[$.
   On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que
$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$$
   Soit $A > 0$. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ converge, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} > A$.
   $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n}$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]0, \alpha],\ \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \geqslant \frac{A}{2}$$
   donc
$$\forall x \in]0, \alpha],\ -f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \geqslant \frac{A}{2}$$
   Bilan : on a montré que
$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in]0, \alpha],\ -f'(x) \geqslant \frac{A}{2}$$
   c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.
   • f est coninue sur $[0, +\infty[$

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0.

f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Exercice n°60 Mines 16-retour élève

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier sa continuité.
2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Limites de f en $+\infty$ et 0. Equivalents ?

Solution :

On note $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+n^2x}$.

1. Pour tout $x > 0$, $\quad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x}$ donc $\sum u_n(x)$ converge par théorème de comparaison.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et

   pour tout $[a,b] \subset \,]\,0,+\infty\,[\,$, $\forall x \in [a,b]$, $\quad 0 \leq u_n(x) \leq u_n(a)$ et $\sum u_n(a)$ converge.

   On en déduit que $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

   $$f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+^*$$

2. Les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad u_n'(x) = \dfrac{-n^2}{(n+n^2x)^2}$.

   pour tout $[a,b] \subset [0,+\infty[\,, \forall x \in [a,b]$, $\quad |u_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n^2a}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2a}$ converge. On en déduit que $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a,b] \subset [0,+\infty[$.

   $$f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x > 0, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n^2}{(n+n^2x)^2}$$

3. $f' \leq 0$ donc f est décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme $f \geq 0$, $\quad f$ admet une limite finie en $+\infty$. En 0, f admet une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

   — Etude en 0. 1ère approche :

   Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} nu_k$.

   Comme somme finie de fonctions continues, S_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Donc $\lim\limits_{x\to 0+} S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

   Pour tout $A > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N$, $\quad S_n(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > A+1$.

   S_N étant continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [0\eta[$, $\quad |S_N(x) - S_N(0)| \leq 1$

   Alors $\forall x \in]0,\eta[\,$, $\quad f(x) \geq S_N(x) \geq S_N(0) - 1 > A$.

   bilan : Pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]0,\eta[\,$, $\quad f(x) > A$: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.

— Etude en 0 . 2ème approche : on cherche tout de suite un équivalent en 0+

Soit x fixé, $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t+t^2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \geq 2$ on a donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leq \frac{1}{n+n^2x} = u_n(x) \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$.

Pour $n = 1$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leq u_1(x) = \frac{1}{1+x}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en sommant les inégalités précédentes de $n = 1$ à $n = N$, on obtient :

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leq \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$ converge car $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $\dfrac{1}{t+t^2x} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2x}$, intégrable sur $[1, +\infty[$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$$

Pour tout $x > 0$,

$\displaystyle\int_1^{X} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} = \int_1^{X} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+xt}\right) \mathrm{d}t = \ln(X) - \ln(1+xX) + \ln(1+x) = \ln\left(\frac{(1+x)X}{1+xX}\right)$

et $\ln\left(\dfrac{(1+x)X}{1+xX}\right) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$.

On a donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$.

$$\forall x > 0, \qquad \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

$\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) \underset{x\to0}{\sim} -\ln x$ d'où par encadrement $\boxed{f(x) \underset{x\to0+}{\sim} -\ln x}$

— Etude en $+\infty$

Pour tout $x > 0$, $\quad 0 \leq f(x) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x} = \frac{K}{x}$ où $K = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Si on reprend l'encadrement $\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$, cela ne permet pas d'obtenir un équivalent car $\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$.

Par contre il est légitime de penser que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x}$.

Comme $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x}$, on évalue $f(x) - \dfrac{K}{x}$

Pour tout $x > 0$, $\quad 0 \leq \dfrac{K}{x} - f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2x(n+n^2x)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3\,x^2} = \frac{C}{x^2}$ où $C = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Par encadrement $\dfrac{K}{x} - f(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ d'où $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{x}}$

Exercice n°61 RMS 2017 n°1010 : Centrale

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{sh}(nx))^2}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

2. Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Solution :

1. Pour $x > 0$, $\dfrac{1}{(\mathrm{sh}(nx))^2} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{4}{e^{2nx}}$, donc la série converge. De même, pour $x < 0$ avec $\dfrac{4}{e^{-2nx}}$.
   $D = \mathbb{R}^\star$.
   Les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{sh}(nx))^2}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur D.
   La série de fonctions converge simplement sur D.
   $f_n'(x) = -\dfrac{2n\mathrm{ch}(nx)}{(\mathrm{sh}(nx))^3}$ et $f_n''(x) = \dfrac{2n^2(3(\mathrm{ch}(nx))^2 - (\mathrm{sh}(nx))^2)}{(\mathrm{sh}(nx))^4}$.
   Comme $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, la dérivée seconde est positive. Donc la dérivée première est croissante et positive sur $]-\infty, 0[$ et croissante et négative sur $]0, +\infty[$.
   Soit donc $a > 0$, $\forall x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, $|f_n'(x)| \leqslant |f_n'(a)|$. Comme $|f_n'(a)| \sim \dfrac{8n}{e^{2na}}$, la série $\sum |f_n'(a)|$ converge et la série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $]-\infty, 0[$ et tout segment de $]0, +\infty[$.
   On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions : f est $\mathcal{C}^1$ sur D.
2. En $+\infty$, une comparaison série-intégrale va nous permettre de conclure :

$$\frac{1}{(\mathrm{sh}(nx))^2} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{(\mathrm{sh}(xt))^2} \geqslant \frac{1}{(\mathrm{sh}((n+1)x))^2}$$

$$\text{Soit } \frac{1}{(\mathrm{sh}(x))^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(\mathrm{sh}(xt))^2} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{sh}(nx))^2} \geqslant \frac{1}{(\mathrm{sh}(x))^2} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{(\mathrm{sh}(xt))^2}$$

   Or une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{sh}(xt))^2}$ est $t \mapsto \dfrac{-1}{x\mathrm{th}(xt)}$.
   La série est donc comprise entre $\dfrac{1}{(\mathrm{sh}(x))^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\mathrm{th}(x)}$ et $\dfrac{1}{(\mathrm{sh}(x))^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\mathrm{th}(2x)}$. L'équivalent est alors $4e^{-2x}$
   En 0, $\dfrac{1}{(\mathrm{sh}(nx))^2} \sim \dfrac{1}{n^2x^2}$. De plus $x \leqslant \mathrm{sh}(x)$.
   On pose alors $g_n(x) = \dfrac{x^2}{(\mathrm{sh}(nx))^2}$ prolongée par continuité en 0 par $\dfrac{1}{n^2}$.
   Grâce à l'inégalité sur sh, cette série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\sum f_n \sim \dfrac{\pi^2}{6}\dfrac{1}{x^2}$

Exercice n°62 RMS 2017 n°815 : Mines

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est continue sur D.
2. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?

Solution :

1. Pour $x < 0$, $\dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Or la série de TG $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge d'après le critère de Riemann.
   Donc la série de fonctions continues converge normalement sur $[0, +\infty[$.
   Donc f est définie sur $[0, +\infty[$ et continue sur le même intervalle.

2. Notons f_n le TG de la série de fonctions.

f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

Comme la série diverge pour $x=0$, f ne peut pas être $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Cependant, pour $a>0$ et $x \geqslant a$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{e^{-a\sqrt{n}}}{n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série des dérivées converge donc normalement sur tout segment de $]0,+\infty[$.

f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice n°63

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est continue sur D.

b) Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?

Solution :

a) Montrons que $D = \mathbb{R}^+$. Posons $u_n(x) = \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$.

Si x est négatif strictement, $u_n(x) \to +\infty$ par croissance comparée, donc la série diverge grossièrement.

Si $x \geq 0$, alors $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Il y a donc convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ et comme pour tout n, $x \mapsto u_n(x)$ est continue sur D, d'après le théorème de convergence normale d'une série de fonctions continues, on en déduit que f est continue sur D.

b) Dérivons $u_n(x)$: $u_n'(x) = \dfrac{-e^{-x\sqrt{n}}}{n}$. Considérons deux réels $0<a<b$ et montrons qu'il y a convergence normale de la série de terme général $u_n'(x)$ sur le segment $[a,b]$.

Pour tout x de $[a,b]$, $|u_n'(x)| \leq \dfrac{e^{-a\sqrt{n}}}{n} = o(\dfrac{1}{n^2})$ par croissance comparée.

D'après le théorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrons que, en revanche, f n'est pas dérivable en 0. Pour cela, montrons que la limite du taux d'accroissement en 0 est égale à $-\infty$, ce qui revient à montrer que la limite lorsque $x \to 0$ par valeurs positives de $\dfrac{f(0)-f(x)}{x}$ est égale à $+\infty$. Nous allons pour cela utiliser la divergence de la série harmonique : $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n} = +\infty$.

Soit A un réel positif, il existe donc un entier N tel que $\forall n \geq N$, $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k} \geq A+1$. Par ailleurs, soit $n \geq N$

$$\begin{aligned}\frac{f(0)-f(x)}{x} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-e^{-x\sqrt{k}}}{k\sqrt{k}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1-e^{-x\sqrt{k}}}{k\sqrt{k}}\end{aligned}$$

Or lorsque $x \to 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1-e^{-x\sqrt{k}}}{k\sqrt{k}} \to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq A+1$.

Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\alpha]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1-e^{-x\sqrt{k}}}{k\sqrt{k}} \geq A$.

Par conséquent, pour tout $x \in]0,\alpha]$, $\dfrac{f(0)-f(x)}{x} \geq A$.

Exercice n°64 Mines 2017 - RMS 968

L'application $x \in I \longmapsto \sum_{n=0} +\infty \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est-elle dérivable en 0 ?

Solution :

◇ $\forall x \in I\!R$, $\forall n \in I\!N$, $\left|\dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Et $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{2^n}$ converge.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est continue sur $I\!R$.

Donc la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est continue sur $I\!R$.

◇ Soit N un entier non nul. Posons $x_N = \dfrac{\pi}{2^{N+1}}$.

Alors $\forall n \geqslant N+1$, $\dfrac{\sin(2^n x_N)}{2^n} = 0$.

Donc $f(x_N) = \sum_{n=0}^{N} \dfrac{\sin(2^n x_N)}{2^n}$.

Or $\forall \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\theta) \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$ par convexité de la fonction sinus.

Or $\forall n \in \{0, N\}$, $2^n x_N \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc $\forall n \in \{0, N\} \dfrac{\sin(2^n x_N)}{2^n} \geqslant \dfrac{2}{\pi} x_N$.

Alors en sommant, $f(x_N) \geqslant (N+1)\dfrac{2}{\pi} x_N$.

Donc $\lim_{N \to +\infty} \dfrac{f(x_N)}{x_N} = +\infty$.

Or $\lim_{N \to +\infty} x_N = 0$.

Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

Exercice n°65 (Mines 2017)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de fonctions de E. Montrer l'équivalence :

$$(f_1, \ldots, f_n) \text{ liée} \iff \forall (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \quad \det((f_i(x_j)_{i,j})) = 0.$$

2. Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension finie. On considére une suite d'éléments de F qui converge simplement sur $[0,1]$ vers $f \in E$. Montrer que la suite considérée converge uniformément sur $[0,1]$ et que $f \in F$.

Solution :

1. Si $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. Alors

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{pmatrix} f_i(x_1) \\ \vdots \\ f_i(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\det((f_i(x_j)_{i,j})) = 0$.

Pour la réciproque, on on montre la contraposée par récurrence. Le cas $n = 1$ est clair. Supposons que, pour toute famille libre $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ tels que

$\det(f_i(x_j))_{\substack{1\le i\le n-1\\1\le j\le n-1}} \neq 0$, et soit $(f_1,\dots,f_n)$ une famille libre de telles fonctions. La famille $(f_1,\dots,f_{n-1})$ est libre donc, par hypothèse de récurrence, il existe $(x_1,\dots,x_{n-1}$ tels que $\det(f_i(x_j))_{\substack{1\le i\le n-1\\1\le j\le n-1}}) \neq 0$. Supposons que

$$\forall x\in[0,1]\qquad \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_{n-1}) & f_2(x)\\ \vdots & & & & \vdots\\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_2(x_{n-1}) & f_n(x)\end{vmatrix} = 0$$

En développant suivant la dernière colonne, on obtient une relation de liaison entre les f_i et, par hypothèse, le coefficient de f_n éést non nul, ce qui contredit la caractère libre de $(f_1,\dots,f_n)$. C'est donc qu'il existe $x_n\in[0,1]$ tel que

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x_n)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_{n-1}) & f_2(x)\\ \vdots & & & & \vdots\\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_2(x_{n-1}) & f_n(x_n)\end{vmatrix} \neq 0$$

et la propriété est établie par récurrence.

2. Soit $(g_1,\dots,g_p)$ une base de F. Posons, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$f_n = \sum_{i=1}^p \lambda_n^i g_i.$$

D'après la question précédente, il existe $(x_1,\dots,x_p)$ tels que les vecteurs

$$V_i = \begin{pmatrix} g_i(x_1)\\ \vdots\\ g_i(x_p)\end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{K}^p$. La suite des vecteurs $\begin{pmatrix} f_n(x_1)\\ \vdots\\ f_n(x_p)\end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} f(x_1)\\ \vdots\\ f(x_p)\end{pmatrix}$ et a pour composantes $(\lambda_n^1,\dots,\lambda_n^p)$ dans la base $(V_1,\dots,V_p)$. Donc chacune de ces suites converge, respectivement vers $a_1,\dots,a_p$. Alors la suite (f_n) converge vers $\displaystyle\sum_{i=1}^p a_i g_i$, ce qui prouve déjà que $f\in F$.

De plus

$$\forall x\in[0,1]\quad |f_n(x)-f(x)| = \left|\sum_{i=1}^p(\lambda_n^i - a_i)g_i\right| \le \max_{1\le i\le p}\|g_i\|_\infty \sum_{i=1}^p |\lambda_n^i - a_i|$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la suite (f_n).

Exercice n°66 Mines-Ponts PSI 2016 - BEOS UPS

Soit a,b des réels strictement positifs.

1. On considère $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)-\cos(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$.
   Existence et calcul de I.
2. Existence et calcul de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution :

1. On considère $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
Notons $f : t \mapsto \dfrac{\cos(at) - \cos(bt)}{t}$.
<u>Sur $]0,1]$:</u> $f(t) = \dfrac{1 - \frac{a^2t^2}{2} + o(t^2) - 1 + \frac{a^2t^2}{2} + o(t^2)}{t} = \dfrac{b^2 - a^2}{2}t + o(t)$.
Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 0$ et donc intégrable sur $]0,1]$.
<u>Sur $[1,+\infty[$:</u> par intégration par partie

$$\int_1^X \frac{\cos(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(at)}{at}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(at)}{at^2}\,\mathrm{d}t$$

De plus $\forall t \in [1,+\infty[$, $|g(t)| = \left|\dfrac{\sin(at)}{at^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{at^2}$ donc g est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et de même $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Finalement I existe bien par somme d'intégrales convergentes.

Avec le problème d'intégrabilité en 0, posons $\forall \varepsilon > 0$:

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Ces deux intégrables convergent d'après ce qui précède. On pose alors $u = at$ dans la première intégrale et $u = bt$ dans la seconde et alors

$$I_\varepsilon = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Pour ε assez petit on a $a\varepsilon$ et $b\varepsilon < \pi$ et comme cos est décroissante sur $[0,\pi]$ alors pour

$$a < b \Rightarrow \cos(b\varepsilon) \leqslant \cos(u) \leqslant \cos(a\varepsilon) \text{ pour } u \in [a\varepsilon, b\varepsilon]$$

Soit par croissance de l'intégrale

$$\cos(b\varepsilon)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant I_\varepsilon \leqslant \cos(a\varepsilon)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

et donc

$$\cos(b\varepsilon)\ln\frac{b}{a}\,\mathrm{d}u \leqslant I_\varepsilon \leqslant \cos(a\varepsilon)\ln\frac{b}{a}$$

Puis $\varepsilon \to 0^+$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon = \ln\frac{b}{a}$ et de même si $b < a$ ainsi $I = \ln\dfrac{b}{a}$.

2. On se rappelle des formules de trigonométrique

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

et donc J converge et vaut

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos((a-b)t) - \cos((a+b)t)}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$$

Exercice n°67 ODLT - planche 107 - Mines Ponts 2017 - exo 1
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2(n^4 + x^2)}$.

1. Etudier la convergence simple de $\sum f_n$, puis la convergence uniforme.
2. Montrer que $\sum f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etudier l'intégrabilité de $\sum f_n$ sur $[1,+\infty[$ et sur $]0,1]$.

Solution :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2(n^4+x^2)}$.

1. • Soit $x > 0$.
   $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2n^4}$ et $f_n(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   De plus, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{x^2n^4}$ converge (Riemann et $4 > 1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge aussi.
   La série de fonctions $\sum f_n$, converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$
   • Soit $n \geq 1$.
   f_n n'est pas bornée au voisinage de 0, donc il ne peut pas avoir convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, pour tout $A > 0$,
   $$\|f_n\|_\infty^{[A,+\infty[} = f_n(A).$$
   Or, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(A)$ converge (d'après le premier point), donc $\sum\limits_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty^{[A,+\infty[}$ converge, donc $\sum\limits_{n\geq 1}$ converge normalement sur $[A,+\infty[$, donc uniformément sur $[A,+\infty[$.
2. Soit $A > 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[A,+\infty[$.
   $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[A,+\infty[$.
   Donc $f = \sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est continue sur $[A,+\infty[$.
   Ceci étant valable pour tout $A > 0$, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. $\star$ • Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > 0$, $f_n(x) > 0$ (donc l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale) et
   $$f_n(x) = \frac{1}{x^2(n^4+x^2)} = \frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^4+x^2}\right),$$
   donc, pour tout $A > 1$,
   $$\begin{aligned}
   \int_1^A f_n(x)dx &= \frac{1}{n^4}\left(\int_1^A \frac{1}{x^2}dx - \int_1^A \frac{1}{n^4+x^2}dx\right)\\
   &= \frac{1}{n^4}\left(\int_1^A \frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{n^2}\int_1^A \frac{1/n^2}{1+(x/n^2)^2}dx\right)\\
   &= \frac{1}{n^4}\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_1^A - \frac{1}{n^2}\left[\arctan(x/n^2)\right]_1^A\right)\\
   &= \frac{1}{n^4}\left(1 - \frac{1}{A} - \frac{1}{n^2}\left(\arctan(A/n^2) - \arctan(1/n^2)\right)\right)\\
   &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n^4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(1/n^2)\right)\right),
   \end{aligned}$$
   Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ converge (donc f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$) et
   $$\int_1^{+\infty} f_n(t)dt = \int_1^{+\infty} |f_n(t)|dt = \frac{1}{n^4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(1/n^2)\right)\right).$$

• D'après les questions 1 et 2, $\sum f_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ vers une fonction f continue (donc continue par morceaux) sur $[1,+\infty[$.

• Enfin, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f_n(t)|dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_1^{+\infty} |f_n(t)|dt$ converge.

• D'où, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $[1,+\infty[$ (et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n\geq 1}$

$\star$ Pour tout $x>0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)\geq 0$, donc $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\geq f_1(x)$.

Or, $f_1(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$, $f_1(x)$ continue et positive sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ diverge (Riemann et $2\geq 1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)dx$ diverge, donc, toujours par comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ diverge, donc f n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice n°68 Centrale 2017

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ on pose $f_n(A)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(I_n+\frac{k}{n^2}A\Big)$.

1. 0n suppose tout d'abord $p=1$ et $a\in\mathbb{R}$. Vérifier à l'aide de Python que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(a)=\mathrm{e}^{a/2}$.
2. On considère une fonction f définie et dérivable au voisinage de 0, telle que $f(0)=0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big)=\frac{f'(0)}{2}$.
3. À l'aide du résultat précédent montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $x\mapsto \mathrm{e}^{x/2}$.
4. On suppose désormais $a\in\mathbb{C}$. Vérifier à l'aide de Python que pour tout $a\in\mathbb{C}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(a)=\mathrm{e}^{a/2}$.
5. Montrer rigoureusement le résultat précédent.
6. Question perdue. Il s'agissait d'étudier la limite de $f_n(A)$ pour $A=\begin{pmatrix}6 & 2\sqrt{2} & 0\\ 2\sqrt{2} & 6 & 2\sqrt{2}\\ 0 & 2\sqrt{2} & 6\end{pmatrix}$.

Solution :

1. Traçons les graphes de $a\mapsto \mathrm{e}^{a/2}$ et $a\mapsto f_{20}(a)$ sur l'intervalle $[0,2]$:

```
def f(n, a):
    p = 1
    for k in range(1, n+1):
        p *= 1+k/n**2*a
    return p

X = np.linspace(0, 2, 64)
Y = [f(20, a) for a in X]
Z = [np.exp(a/2) for a in X]
plt.plot(X, Y)
plt.plot(X, Z)
```

2. Par définition $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$ donc pour tout $\epsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que $0\leq x\leq\eta\implies \big|f(x)-xf'(0)\big|\leq\epsilon x$.
   Pour $n\geq\dfrac{1}{\eta}$ on a pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $0\leq\dfrac{k}{n^2}\leq\dfrac{1}{n}\leq\eta$ donc $\Big|f\Big(\dfrac{k}{n^2}\Big)-\dfrac{k}{n^2}f'(0)\Big|\leq\epsilon\dfrac{k}{n^2}$.

En sommant on obtient : $\left|\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$ soit $\left|\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{n+1}{2n}\right| \leq \epsilon\frac{n+1}{2n} \leq \epsilon$.

Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\frac{n+1}{2n}=0$ soit $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}$.

3. $\ln\big(f_n(a)\big)=\sum_{k=1}^{n}\ln\big(1+\frac{k}{n^2}a\big)$ donc en appliquant la question précédente à la fonction $f : x\mapsto \ln(1+ax)$ on prouve que $\lim_{n\to+\infty}\ln\big(f_n(a)\big)=\frac{f'(0)}{2}=\frac{a}{2}$ soit $\lim_{n\to+\infty}f_n(a)=\mathrm{e}^{a/2}$.

4. On peut calculer $\left|f_{100}(a)-\mathrm{e}^{a/2}\right|$ pour quelques valeurs complexes de a :

```
for a in (1j, 1+1j, 1-1j, 2+3j):
    print(abs(f(100, a)-np.exp(a/2)))
```

5. Posons $a=x+iy$. On a $\ln\left|f_n(a)\right|=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(\big(1+\frac{k}{n^2}x\big)^2+\frac{k^2}{n^4}y^2\Big)$. D'après la question b appliquée à $f : t\mapsto \ln\big((1+xt)^2+t^2y^2\big)$, $\lim_{n\to+\infty}\ln\left|f_n(a)\right|=\frac{f'(0)}{4}=\frac{x}{2}$ donc $\lim\left|f_n(a)\right|=\mathrm{e}^{x/2}$.

Pour n assez grand on a pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $1+\frac{k}{n^2}x>0$ donc $\arg\Big(1+\frac{k}{n^2}a\Big)=\arctan\left(\frac{\frac{k}{n^2}y}{1+\frac{k}{n^2}x}\right)$.

Ainsi, $\arg\big(f_n(a)\big)=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{\frac{k}{n^2}y}{1+\frac{k}{n^2}x}\right)$ et d'après la question b avec à $f : t\mapsto \arctan\left(\frac{ty}{1+tx}\right)$, $\lim\arg\big(f_n(a)\big)=\frac{f'(0)}{2}=\frac{y}{2}$.

On en déduit que $\lim f_n(a)=\mathrm{e}^{x/2}\mathrm{e}^{iy/2}=\mathrm{e}^{a/2}$.

6. A est symétrique réelle donc diagonalisable. On calcule $\mathrm{Sp}(A)=\{2,6,10\}$ donc il existe P (orthogonale le cas échéant, mais ce n'est pas nécessaire ici) telle que $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}2&&\\&6&\\&&10\end{pmatrix}$.

On a $f_n(A)=P\begin{pmatrix}f_n(2)&&\\&f_n(6)&\\&&f_n(10)\end{pmatrix}P^{-1}$ donc $\lim f_n(A)=P\begin{pmatrix}\mathrm{e}&&\\&\mathrm{e}^3&\\&&e^5\end{pmatrix}P^{-1}$. Reste à calculer P puis $f_n(A)$.

Thème : Calcul différentiel

Exercice n°69 Planche RMS 1025 Centrale PC 2017

Soit $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x+y+1}{3}-\sqrt[3]{xy}$. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Solution :

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert $\mathbb{R}^2$, les extrema locaux de f sont donc à chercher parmi les points critiques de f.

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\dfrac{y^{1/3}}{x^{2/3}}=0\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\dfrac{x^{1/3}}{y^{2/3}}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y^{1/3}=x^{2/3}\\ x^{1/3}=y^{2/3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x=y^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}y=y^4\\ x=y^2\text{ car } x \text{ et } y \text{ sont réels}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

En conclusion, les points critiques sont $O=(0,0)$ et $A=(1,1)$.

Étude en $O(0,0)$:

Posons $u=(a,b)\neq(0,0)$ et $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}f(O+tu)-f(O) & = & f(ta,tb)-\dfrac{1}{3}=t.\dfrac{a+b}{3}-\sqrt[3]{tatb}\\ & = & t.\dfrac{a+b}{2}-t^{2/3}\sqrt[3]{ab}\\ & \sim_{t\to0} & -t^{2/3}\sqrt[3]{ab}\text{ si } a\neq0 \text{ et } b\neq0\end{array}$$

$-t^{2/3}\sqrt[3]{ab}$ n'est pas de signe constant, O n'est donc pas un extremum local.

Étude en $A(1,1)$:

Posons $u=(a,b)\neq(0,0)$ et $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}f(A+tu)-f(A) & = & f(1+ta,1+tb)-0=1+t.\dfrac{a+b}{3}-\sqrt[3]{(1+ta)(1+tb)}\\ & = & 1+t\dfrac{a+b}{3}-\sqrt[3]{1+t(a+b)+t^2ab}\\ & =_{t\to0} & 1+t\dfrac{a+b}{3}-\left(1+t.\dfrac{a+b}{3}+t^2\dfrac{ab}{3}-\dfrac{1}{9}t^2(a+b)^2+o(t^2)\right)\\ & =_{t\to0} & \dfrac{t^2}{9}\left(3ab-(a+b)^2\right)+o(t^2)\\ & =_{t\to0} & \dfrac{t^2}{9}\left(-a^2+ab-b^2\right)+o(t^2)\\ & \sim_{t\to0} & \underbrace{\dfrac{t^2}{9}\left(-(a-\dfrac{b}{2})^2-\dfrac{3}{4}b^2\right)}_{\leq0}\quad\text{si } (a,b)\neq(0,0)\end{array}$$

$\boxed{f \text{ admet un minimum local en } A \text{ qui vaut } 0.}$

$\boxed{f \text{ n'admet pas de maximum local.}}$

Étude globale :

$f(x,0)=\dfrac{x+1}{3}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

$\boxed{f \text{ n'admet donc pas d'extremum global.}}$

Exercice n°70 RMS Mines PC 2017

Soit (E) l'équation différentielle : $2xy''+y'-y=0$.

1. Trouver une solution f de (E) développable en série entière au voisinage de 0 et telle que $f(0)=1$.
2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
3. Résoudre (E).

Solution :

Soit (E) l'équation différentielle : $2xy''+y'-y=0$.

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Si on pose pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Donc pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned}
2xf''(x) + f'(x) - f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} [2n(n-1) + n] a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} [2(n+1)^2 - (n+1)] a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} [(2n^2 + 3n + 1) a_{n+1} - a_n] x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, f est solution de (E) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+1)(n+1) a_{n+1} = a_n$$

Si on impose de plus que $f(0) = a_0 = 1$, on en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1 \cdot n!} = \frac{2^n}{(2n)!}$$

On vérifie que le rayon de convergence de la série entière n'est pas nul : soit $x \neq 0$ et $u_n = \dfrac{2^n}{(2n)!} x^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0 \text{ et } \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{2}{(2n+2)(2n+1)} |x| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est absolument convergente. Ainsi $R = +\infty$.

(E) admet une unique solution f développable en série entière sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, la fonction f_0 définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^n$$

2. Expression de f_0 à l'aide des fonctions usuelles :
- si $x \geqslant 0$, on pose $u = \sqrt{x}$; ainsi

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} u^{2n} = \operatorname{ch}(\sqrt{2x})$$

- si $x \leqslant 0$, on pose $u = \sqrt{-x}$; ainsi

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} (-u)^{2n} = \cos(\sqrt{2x})$$

3. L'énoncé ne précise pas sur quel intervalle on doit résoudre (E).
   - Sur $]0,+\infty[$.
   Remarque : D'après le cours (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Cela n'a pas l'air simple...
   Première méthode : On cherche les solutions de (E) sous la forme $y(x)=z(x)\mathrm{ch}(\sqrt{2x})$.
   Seconde méthode : La forme de f permet de tenter le changement de variable $t=\sqrt{x}$. Pour tout $x>0$, si on pose $f(x)=u(\sqrt{x})$, on a

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,u'(\sqrt{x})$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 u''(\sqrt{x})+\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right)u'(\sqrt{x})=\frac{1}{4x}\,u''(\sqrt{x})-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\,u'(\sqrt{x})$$

   donc

$$2xf''(x)+f'(x)-f(x)=\frac{1}{2}\,u''(\sqrt{x})-u(\sqrt{x})$$

   f est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

$$\forall t>0,\ u''(t)-2u(t)=0$$

   c'est-à-dire

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t>0,\ u(t)=\lambda\mathrm{ch}(\sqrt{2}t)+\mu\mathrm{sh}(\sqrt{2}t)$$

   Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions

$$x\mapsto\lambda\mathrm{ch}(\sqrt{2x})+\mu\mathrm{sh}(\sqrt{2x}),\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

   - Sur $]-\infty,0[$.
   De même on effectue le changement de variable $t=\sqrt{-x}$. Pour tout $x<0$, si on pose $f(x)=u(\sqrt{-x})$, on a

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\,u'(\sqrt{-x})$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right)^2 u''(\sqrt{-x})-\frac{1}{2}(-1)\left(-\frac{1}{2(-x)\sqrt{-x}}\right)u'(\sqrt{-x})\\&=-\frac{1}{4x}\,u''(\sqrt{-x})+\frac{1}{4x\sqrt{-x}}\,u'(\sqrt{-x})\end{aligned}$$

   donc

$$2xf''(x)+f'(x)-f(x)=-\frac{1}{2}\,u''(\sqrt{x})-u(\sqrt{x})$$

   f est solution de (E) sur $]-\infty,0[$ si et seulement si

$$\forall t>0,\ u''(t)+2u(t)=0$$

   c'est-à-dire

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t>0,\ u(t)=\lambda\cos(\sqrt{2}t)+\mu\sin(\sqrt{2}t)$$

   Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions

$$x\mapsto\lambda\cos(\sqrt{-2x})+\mu\sin(\sqrt{-2x}),\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

   - Sur $\mathbb{R}$.
   Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors il existe des réels $\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2$ tels que

$$f(x)=\begin{cases}\lambda_1\mathrm{ch}(\sqrt{2x})+\mu_1\mathrm{sh}(\sqrt{2x}) & \text{si } x>0\\ \lambda_2\cos(\sqrt{-2x})+\mu_2\sin(\sqrt{-2x}) & \text{si } x<0\end{cases}$$

   Par continuité de f en 0, $\lambda_1=\lambda_2=f(0)=\lambda$;
   f est dérivable en 0, donc $\dfrac{f(x)-\lambda}{x}=\lambda\dfrac{\mathrm{ch}(\sqrt{2x})-1}{x}+\mu\dfrac{\mathrm{sh}(\sqrt{2x})}{x}$ admet une limite finie en 0^+.

Or $\operatorname{ch}(\sqrt{2x})-1 \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{2x}{2}$ et $\operatorname{sh}(\sqrt{2x}) \underset{x\to0^+}{\sim} \sqrt{2x}$ donc nécessairment $\mu_1=0$.
De même $\mu_2=0$.
Ainsi f est de la forme λf_0. On sait d'après la première question que les fonctions de ce type sont bien solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctionsλf_0 pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice n°71 centrale 2017- rms 1238

Soit $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>|y|\right\}$ et $f:(x,y)\in\Omega\mapsto \displaystyle\int_0^\pi \ln(x+y\cos(t))\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
2. Calculer ∇f en tout point de Ω.
3. Calculer $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Solution :

1. $\forall (x,y)\in\Omega,\ \forall t\in[0\pi],\quad x>|y|\geq|y\cos(t)|\geq -y\cos t$ donc $t\mapsto\ln(x+y\cos(t))$ est continue et intégrable sur $[0,\pi]$ (1) .On en déduit que f est définie sur Ω.
   A y fixé dans $\mathbb{R}$, notons $I_y=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ (x,y)\in\Omega\}=]\,|y|,+\infty\,[$ et $h_y:(x,t)\mapsto\ln(x+y\cos(t))$.
   — $\forall x\in I_y,\quad t\mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,\pi]$ (par (1))
   — Il existe $\dfrac{\partial h_y}{\partial x}:(x,t)\mapsto\dfrac{1}{x+y\cos(t)}$.
     * $\forall x\in I_y,\quad t\mapsto\dfrac{1}{x+y\cos(t)}$ est continue et intégrable sur $[0,\pi]$.
     * $\forall t\in[0,\pi],\quad x\mapsto\dfrac{1}{x+y\cos(t)}$ est continue sur I_y.
     * Domination locale
       $\forall[a,b]\in I_y,\ \forall x\in[a,b],\ \forall t\in[0,\pi],\quad 0<a+y\cos(t)\leq x+y\cos(t)$ d'où
$$\left|\frac{\partial h_y}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{1}{a+y\cos(t)}\quad\text{et}\quad t\mapsto\frac{1}{a+y\cos(t)}\text{est intégrable sur }[0,\pi]$$
   On déduit du théorème de Leibniz que h_y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_y et que $h_y'=\displaystyle\int_0^\pi h_y(\,.\,,t)\,\mathrm{d}t$.
$$\text{Il existe donc sur }\Omega,\quad \frac{\partial f}{\partial x}:(x,y)\mapsto\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{x+y\cos(t)}$$
   Par contre, il reste à montrer, en restant dans le cadre du programme PC que cette application est continue sur Ω .
   On peut montrer la continuité en (x_0,y_0) soit par caractérisation séquentielle,
   soit directement en majorant $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|$
   Soit $(x_0,y_0)\in\Omega$.
   $\forall(x,y)\in\Omega,\forall t\in[0,\pi]$
$$\left|\frac{1}{x+y\cos(t)}-\frac{1}{x_0+y_0\cos(t)}\right|=\left|\frac{x_0-x+(y_0-y)\cos(t)}{(x+y\cos(t))(x_0+y_0\cos(t))}\right|\leq\frac{|x_0-x|+|x_0-x|}{(x-|y|)(x_0-|y_0|)}=\varphi(x,y)$$
   On en déduit que
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\leq\pi\varphi(x,y)$$
   Par théorèmes d'opérations, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\varphi(x,y)=0$, ce qui assure la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en (x_0,y_0).

De la même manière, on montre l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur Ω.

A x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, notons $J_x = \{\, y \in \mathbb{R} \,;\; (x,y) \in \Omega \,\} =]-x, x[$ et $g_x : (y,t) \mapsto \ln(x + y\cos(t))$.

— $\forall y \in J_x \quad t \mapsto g(y,t)$ est continue et intégrable sur $[0,\pi]$ (par (1))

— Il existe $\dfrac{\partial g_x}{\partial y} : (y,t) \mapsto \dfrac{\cos t}{x + y\cos(t)}$.

$t \mapsto \dfrac{\cos t}{x + y\cos(t)}$ est continue et intégrable sur $[0,\pi]$ pour tout $y \in J_x$ et $y \mapsto \dfrac{\cos t}{x + y\cos(t)}$ est continue sur J_x pour tout $t \in [0,\pi]$.

Pour tout $[-a,a] \subset]-x,x[, \forall y \in [-a,a], \forall t \in [0,\pi]$

$$\left|\frac{\partial g_x}{\partial y}(y,t)\right| \leq \frac{1}{x-y} \leq \frac{1}{x-a} \text{ et } t \mapsto \frac{1}{x-a} \text{ est intégrable sur } [0,\pi]$$

On en déduit l'existence sur Ω de $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(t)}{x + y\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

La continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ se montre exactement de la même manière que celle de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

2. Le vecteur gradient de f en (x,y) est le vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
3. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \pi$

Exercice n°72 RMS 2017 n°1024 : Centrale

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Solution :

On cherche les points critiques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{aligned}$$

En additionnant les deux lignes, on obtient $x = -y$ puis en remplaçant, $(x,y) \in \{(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.

Etude en $(0,0)$:

$f(x,x) = 2x^4 \geqslant 0$ et $f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2-4) \leqslant 0$ au voisinage de $(0,0)$. Ainsi, il n'y a pas d'extremum local en $(0,0)$.

Etude en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:

$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^4 - 8(\sqrt{2})^2 = -8$.

On réalise ensuite une translation :

$f(\sqrt{2}+h, -\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+h)^4 + (-\sqrt{2}+k)^4 - 2(2\sqrt{2}+h-k)^2 = -8 + h^4 + k^4 + 4\sqrt{2}(h^3 - k^3) + 10h^2 + 10k^2 + 4hk + 8$

Ensuite $h^4 + 4\sqrt{2}h^3 + 8h^2 = h^2(h+2\sqrt{2})^2$ et $2h^2 + 2k^2 + 4hk = 2(h+k)^2$.

La différence est donc positive. f possède un minimum global en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Etude en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

Comme $f(y,x) = f(x,y)$, on obtient le même résultat que précédemment.

Exercice n°73 RMS 2017 n°837 : Mines

Soient $U = \{(x,y) \in]-\pi/2, \pi/2[^2; x < 0, y > 0, y - x > \pi/2\}$ et $f : (x,y) \mapsto \tan(y) - \tan(x) + \tan(x-y)$.

1. Montrer que f admet un minimum sur U.
2. Soit C un disque du plan. Trouver les triangles pleins contenant C et d'aire minimale.

Solution :

1. On commence par chercher les points critiques :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= -\tan^2 x + \tan^2(x-y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= \tan^2 y - \tan^2(x-y) = 0 \end{cases}$$
On trouve alors $\tan^2 x = \tan^2 y$.
A cause des conditions sur x et y, $\tan x = -\tan y = \tan(-y)$ puis $x = -y$ car tan est une bijection sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
De plus $y - x \in]\pi/2, \pi[$, donc sa tangente est négative. D'où, en utilisant la première équation et la périodicité de tan, $y - x - \pi = x$ soit $x = -\pi/3 = -y$.
Il n'y a donc qu'un point critique $(-\pi/3, \pi/3)$.
$\tan(a) - \tan(b) = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$ donc $f(x,y) = \tan(y-x)\tan(x)\tan(y)$.
Or d'après l'inégalité arithmético-géométrique, comme $\tan(y)$, $-\tan(x)$ et $\tan(x-y)$ sont positifs, $f(x,y) \geqslant 3(\tan(y)(-\tan(x))\tan(x-y))^{1/3}$ soit $f(x,y) \geqslant 3(f(x,y))^{1/3}$. Ce qui fournit $f(x,y) \geqslant 3\sqrt{3}$, valeur de f en $(-\pi/3, \pi/3)$.
Il s'agit bien d'un minimum global.
2. Considérons un disque de rayon R. Pour des raisons d'homothétie, le triangle d'aire minimale cherché est tel que le cercle y est inscrit.
On note alors ABC le triangle, A', B' et C' les points de contact entre le cercle inscrit et le triangle sur les côtés opposés aux sommets de même nom.
Soit I le centre du cercle circonscrit.
$\dfrac{AC'}{IC'} = \tan\left(\dfrac{\pi - \hat{A}}{2}\right)$ donc $AC' = R\tan\left(\dfrac{\pi - \hat{A}}{2}\right)$
De même, $BA' = R\tan\left(\dfrac{\pi - \hat{B}}{2}\right)$ et $CA' = R\tan\left(\dfrac{\pi - \hat{C}}{2}\right)$.
L'aire du triangle est alors
$$\begin{aligned} & R^2\left(\tan\left(\frac{\pi - \hat{A}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi - \hat{B}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi - (\pi - \hat{A} - \hat{B})}{2}\right)\right) \\ = \ & R^2\left(\tan\left(\frac{\pi - \hat{A}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi - \hat{B}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right)\right) \end{aligned}$$
Notons $y = \dfrac{\pi - \hat{A}}{2}$ et $-x = \dfrac{\pi - \hat{B}}{2}$.
Alors $x - y = \dfrac{\hat{B} - \pi}{2} - \dfrac{\pi - \hat{A}}{2} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2} - \pi$
On retrouve alors la fonction étudiée en première question : le triangle est équilatéral.

Exercice n°74

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Solution :

Montrons que f tend vers $+\infty$ lorsque $||(x,y)|| \to +\infty$. Pour cela, on va recourir aux coordonnées polaires.
Notons $r = ||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Comme x et y sont des réels strictement positifs, il existe $t \in]0, \pi/2[$ tel que $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$.
On a alors $f(x,y) = r^4(\cos^4 t + \sin^4 t) - 2r^2(\cos t - \sin t)^2 \geq r^4(\cos^4 t + \sin^4 t) - 8r^2$.

Considérons à présent la fonction $g : t \mapsto \cos^4 t + \sin^4 t$. Cette fonction est $\pi/2$ périodique et sa dérivée s'annule en $\pi/4$. Une rapide étude de fonction montre qu'en $\pi/4$, g admet un minimum qui vaut $1/2$.

On en déduit : $f(x,y) \geq \dfrac{r^4}{2} - 8r^2$ et donc $f(x,y) \to +\infty$ lorsque $r \to +\infty$.

Il s'ensuit, par un raisonnement classique, que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Démontrons ce résultat. Soit $R > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $||(x,y)|| \geq R \Longrightarrow f(x,y) \geq 0$.

La boule fermée de centre O et de rayon R est un compact de $\mathbb{R}^2$. f est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$ et donc est bornée et atteint ses bornes sur cette boule fermée.

En particulier en son minimum $f(x_0, y_0) \leq f(0,0) = 0$ et en dehors de cette boule, par construction, $f(x,y) \geq 0$. On en déduit que le minimum de f sur cette boule fermée est en fait le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$. C'est donc un minimum global.

Calculons à présent les points critiques de f.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x^3 - (x-y) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow y^3 - (y-x) = 0$.

On en déduit que $x = -y$, ce qui donne trois points critiques :

$(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Comme $f(-x,-y) = f(x,y)$, on en déduit que les deux derniers points critiques ont la même nature.

Par ailleurs, $f(0,0) = 0$ et $f(x,x) = 2x^4$ et $f(x,0) = x^4 - 2x^2$ qui est strictement négatif pour $|x| < \sqrt{2}$.

Par conséquent, dans toute boule centrée sur (0,0), f prendra des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, c'est donc un point selle (i.e. pas un extremum local).

D'après l'existence d'un minimum global établie plus haut, qui correspond forcément à un point fixe car le domaine ici est $\mathbb{R}^2$, on en déduit que les deux points critiques $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont tous deux des minima globaux.

Exercice n°75 Mines 2017 - RMS 995

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = (t^2, te^t, cos(t))$.

1. Existe-t-il des points singuliers ?
2. Déterminer des équations cartésiennes de la tangente au point de paramètre 1.

Solution :

1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \big(2t, (1+t)e^t, -\sin(t)\big)$.
   Supposons qu'il existe un réel t tel que $f'(t) = 0$. Alors $2t = 0$ et $1 + t = 0$. Ce qui est impossible. Il n'existe donc pas de points singuliers.
2. $f(1) = (1, e, \cos(1))$ et $f'(1) = (2, 2e, -\sin(1))$.
   Un point $M = (x,y,z)$ est un point de la tangente en $f(1)$ si et seulement si il existe un réel λ tel que $(x,y,z) = f(1) + \lambda f'(1)$.
   ou encore si et seulement si il existe un réel λ tel que $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & e(1+2\lambda) \\ z & = & \cos(1) - \lambda \sin(1) \end{array}\right.$
   Ainsi $M = (x,y,z)$ est un point de la tangente en $f(1)$ si et seulement si $y = ex$ et $z = \cos(1) - \dfrac{\sin(1)}{2} + x\dfrac{\sin(1)}{2}$.

Exercice n°76 Mines-Ponts PSI 2016 - BEOS UPS

On définit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

Ensemble de définition ? De continuité ? De dérivabilité ?

Solution :

Notons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

Ensemble de définition :
Étudions la convergence simple de $\sum f_n$.
Soit $x \neq 0$, alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n(n^2x^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x}$.
Or $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente donc $\sum f_n(x)$ converge.
Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et donc $\sum f_n(0)$ converge.
Finalement $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Continuité :
Étudions la convergence uniforme de $\sum f_n$ (ou normale).
Chaque fonction f_n est impaire, étudions-la sur $[0, +\infty[$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \geqslant 0, f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$$

donc $f_n'(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{n}$. Un tableau de variation prouve que le maximum est atteint en $x = \frac{1}{n}$ et vaut

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} = \|f_n\|_\infty$$

Ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$, puis par parité sur $\mathbb{R}$ et donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité :
Étudions la convergence uniforme ou normale de $\sum f_n'$.
On pourrait calculer $f_n''(x)$ pour déterminer $\|f_n'\|_\infty$ mais on s'aperçoit que $f_n'(0) = \frac{1}{n}$ et comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors c'est inutile : il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.
Soit alors $a > 0$, étudions la convergence normale sur $[a, +\infty[$. Pour $\forall x \geqslant a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} \leqslant \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leqslant \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3a^2}$$

On en déduit que $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_*^+$, et par parité sur tout segment de $\mathbb{R}^*$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Montrons enfin que f n'est pas dérivable en 0. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = \frac{1}{x}(S(x)-S(0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t$$

par comparaison avec intégrale (cette dernière étant convergente).
En posant $u = tx$ on obtient

$$\frac{1}{x}(S(x)-S(0)) \geqslant \int_x^{+\infty} \frac{1}{u(1+u^2)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

car la fonction $u \mapsto \frac{1}{u(1+u^2)}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.
Finalement S n'est pas intégrable en 0.

Exercice n°77 Centrale 2016

Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ et } g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t).$$

1. Trouver une relation liant $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$
2. Montrer que
$$\varphi \colon r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $(r\varphi'(r))' = 0$
3. Conclure que φ est constante.

Solution :

1. g est de classe $\mathcal{C}^2$ par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et par la règle de la chaine :
$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos t\frac{\partial f}{\partial x} + \sin t\frac{\partial f}{\partial y}$$
ainsi que
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \cos t\frac{\partial f}{\partial x} + \sin t\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos t\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
D'autre part :
$$\frac{\partial g}{\partial t} = -r\sin t\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos t\frac{\partial f}{\partial y}$$
et donc :
$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -r\cos t\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin t\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2\cos t\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
Donc : $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = r^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0$
2. $g(r,t) \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$ admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$.
Pour tout $r \in \mathbb{R}$, les applications $t \mapsto g(r,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial r}$ sont continues par morceaux donc intégrables sur $[0, 2\pi]$.
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ est continue en r et continue par morceaux en t.
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ est continue en r sur le compact $[a,b] \times [0, 2\pi]$ donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$ et :
$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [0, 2\pi], \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\right| \leqslant M = \psi(t)$$
La fonction ψ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et donc, par intégration sur tout segment, on peut affirmer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec :
$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\mathrm{d}t \text{ et } \varphi''(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$r(r\varphi'(r))' = r\varphi'(r) + r^2\varphi''(r) = \int_0^{2\pi} r\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) + r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\mathrm{d}t$$

soit

$$r(r\varphi'(r))' = \left[\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\right]_0^{2\pi} = 0$$

puisque $t \mapsto g(r,t)$ est 2π-périodique, il en est de même pour $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(r,t)$ donc finalement :

$$r(r\varphi'(r))' = 0$$

Ainsi la fonction $r \mapsto (r\varphi'(r))'$ est continue et nulle sur $\mathbb{R}^*$, cette fonction continue est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction $r \mapsto r\varphi'(r)$ est de dérivée nulle donc constante sur $\mathbb{R}$, il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall r \in \mathbb{R}, r\varphi'(r) = C$$

Soit, sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, $\varphi'(r) = \dfrac{C}{r}$ et donc $\varphi(r) = C\ln|r| + D$ (les constantes C et D ne sont pas identiques sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, néanmoins φ étant définie et continue sur $\mathbb{R}$ alors $C = 0$ et finalement φ est constante.

Exercice n°78 ODLT 2017 - planche 98 - Mines Ponts - exo 3 retouché, matrice tombe très mal

Résoudre $\begin{cases} x' = x + y - 2z + te^t \\ y' = -x + 4y - 5z + e^t \\ z' = y - z + t^2e^t \end{cases}$

Solution :

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ t^2e^t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Comme on cherche x, y et z dérivables, X est dérivable et le système devient : $X' = AX + B$.

• **Réduction de A :**

Après calcul, on obtient :

— $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$.

— $E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *Donc A n'est pas diagonalisable*

— $E_2(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Comme A est trigonalisable (car χ_A est scindé), mais pas diagonalisable, on cherche P telle que $A = P\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$, donc X tel que $AX = X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on trouve, par exemple, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, P est inversible (car $\det(P) = 1 \neq 0$) et, par construction, d'après les propriétés des matrices de changement de base, on a $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

• **Réduction du système différentiel :**
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} X' = AX + B &\Leftrightarrow X' = PTP^{-1}X + B \\ &\Leftrightarrow P^{-1}X' = TP^{-1}X + P^{-1}B \quad \text{(car } P \text{ est inversible)} \\ &\Leftrightarrow Y' = TY + P^{-1}B \end{aligned}$$

en posant $Y = P^{-1}X$ (et on a alors $Y' = P^{-1}X'$ car P^{-1} est une constante indépendante de t).
Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Alors, comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$Y' = TY + P^{-1}B \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + te^t - e^t + 2t^2e^t \\ y_2' = y_2 + te^t - t^2e^t \\ y_3' = 2y_3 - te^t + e^t - t^2e^t \end{cases}$$

• **Résolution de $y_3' = 2y_3 - te^t + e^t - t^2e^t$:**
L'équation homogène ($y_3' = 2y_3$) a pour solution $t \mapsto K_3e^{2t}$ où $K_3 \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $P(t)e^t$ (car le second membre est de la forme polynôme/exponentielle). Alors

$$y_3' = 2y_3 - te^t + e^t - t^2e^t \Leftrightarrow (P'(t) + P(t) - 2P(t))e^t = (-t + 1 - t^2)e^t \Leftrightarrow P'(t) - P(t) = -t^2 - t + 1 \quad (\text{car } e^t > 0)$$

On prend donc P de degré 2 de coefficient dominant 1 : $P(t) = t^2 + bt + c$. Alors

$$P'(t) - P(t) = -t^2 - t + 1 \Leftrightarrow 2t + b - t^2 - bt - c = -t^2 - t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - b = -1 \\ b - c = +1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 2 \end{cases}.$$

La solution générale de $y_3' = 2y_3 - te^t + e^t - t^2e^t$ est donc :

$$y_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto K_3e^{2t} + (t^2 + 3t + 2)e^t.$$

• **Résolution de $y_2' = y_2 + te^t - t^2e^t$:**
L'équation homogène ($y_2' = y_2$) a pour solution $t \mapsto K_2e^t$ où $K_2 \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $P(t)e^t$ (car le second membre est de la forme polynôme/exponentielle). Alors

$$y_2' = y_2 + te^t - t^2e^t \Leftrightarrow P'(t)e^t = (-t^2 + t)e^t \Leftrightarrow P'(t) = -t^2 + t \quad (\text{car } e^t > 0)$$

On prend donc P de degré 3 : $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Alors

$$P'(t) = -t^2 + t \Leftrightarrow 3at^2 + 2bt + c = -t^2 + t \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -1 \\ 2b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/3 \\ b = 1/2 \\ c = 0 \end{cases}.$$

La solution générale de $y_2' = y_2 + te^t - t^2e^t$ est donc :

$$y_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto K_2e^t + \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right)e^t.$$

• **Résolution de $y_1' = y_1 + y_2 + te^t - e^t + 2t^2e^t$:**
Avec la valeur trouvée pour y_2, cette équation devient :

$$y_1' = y_1 + \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + t - 1 + K_2\right)e^t.$$

L'équation homogène ($y_1' = y_1$) a pour solution $t \mapsto K_1 e^t$ où $K_1 \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $P(t)e^t$ (car le second membre est de la forme polynôme/exponentielle). Alors

$$y_1' = y_1 + \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + t - 1 + K_2\right)e^t \Leftrightarrow P'(t)e^t = \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + t - 1 + K_2\right)e^t$$
$$\Leftrightarrow P'(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + t - 1 + K_2 \quad (\text{car } e^t > 0)$$

On prend donc P de degré 4 : $P(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$. Alors

$$P'(t) = -\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2+t-1+K_2 \Leftrightarrow 4at^3+3bt^2+2ct+d = -\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2+t-1+K_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -1/3 \\ 3b = 5/2 \\ 2c = 1 \\ d = -1 + K_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/12 \\ b = 5/6 \\ c = 1/2 \\ d = -1 + K \end{cases}$$

La solution générale de $y_1' = y_1 + \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + t - 1 + K_2\right)e^t$ est donc :

$$y_1 : t \mapsto K_1 e^t + \left(-\frac{1}{12}t^4 + \frac{5}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + (K_2 - 1)t\right)e^t.$$

• **Conclusion :** D'où X solution de $X' = AX + B$ si et seulement si $Y' = TY + P^{-1}B$ où $Y = P^{-1}X$, donc si et seulement si $X = P \begin{pmatrix} K_1 e^t + \left(-\frac{1}{12}t^4 + \frac{5}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + (K_2 - 1)t\right)e^t \\ K_2 e^t + \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right)e^t \\ K_3 e^{2t} + (t^2 + 3t + 2)e^t \end{pmatrix} = \ldots$ où $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice n°79 Mines 2017

Soit $(E) : x(x+1)y'' + (-4x - 1)y' + 6y = 0$.

1. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Pour $x > 0$ on pose $\phi(x) = x^2\psi(x)$. Montrer que si ϕ est solution de (E) alors ψ' est solution de (E_1) où (E_1) est une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.
3. Soit $(E_1) : x(x+1)u' + 3u = 0$. Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Indication. On utilisera $\dfrac{3}{t(t+1)} = \dfrac{3}{t} - \dfrac{3}{t+1}$.

   En déduire ψ' puis ψ.
4. Achever la résolution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution :

1. Puisque $x(x+1)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de (E) forment un espace vectoriel de dimension 2 (équation linéaire homogène du second ordre).
2. Posons $y = x^2 z$. Alors $y' = 2xz + x^2 z'$ et $y'' = 2z + 4xz' + x^2 z''$ et (calcul) $(E) \iff x(x+1)z'' + 3z' = 0$ donc ϕ est solution de (E) si et seulement si ψ' est solution de $(E_1) : x(x+1)u' + 3u = 0$.
3. $(E_1) \iff u' = \dfrac{-3}{x(x+1)}u = \Big(\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{3}{x}\Big)u$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $3\ln\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big)^3$.

   Avec les notations du b, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi'(x) = \lambda\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big)^3 = \lambda\Big(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\Big)$ donc $\psi(x) = \lambda\Big(x + 3\ln(x) - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2}\Big) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\phi(x) = \lambda\Big(x^3 + 3x^2\ln(x) - 3x - \dfrac{1}{2}\Big) + \mu x^2$.

Thème : Série entière

Exercice n°80 Planche BEOS 3111 Centrale PC 2017

On considère l'équation différentielle $(1+t^2)y''(t)+ty'(t)-y(t)=0$.

1. Tracer les solutions f et g soumises aux conditions initiales $(f(0),f'(0))=(0,1)$ et $(g(0),g'(0))=(1,0)$. L'une d'elles vous semble-t-elle évidente ?
2. Chercher l'autre solution sous la forme d'une somme de série entière.
3. Pour tout t dans $]-1,1[$, prouver l'égalité $g(t)=\sqrt{1+t^2}$.

Solution :

1. L'équation différentielle s'écrit ;

$$y''(t)=\frac{1}{1+t^2}y(t)-\frac{t}{1+t^2}y'(t)$$

On pose $X(t)=\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, ainsi, $X'(t)=\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{1+t^2} & -\dfrac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{1+t^2} & -\dfrac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}X($

On se ramène donc à trouver les solutions approchées d'un système différentiel. Le code python s'écrit pour $y(0)=0$, $y'(0)=1$: :

```
import numpy as np
import scipy.integrate as integr
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,t):
   return np.array([x[1],x[0]/(1+t**2)-t*x[1]/(1+t**2)])
T = np.arange(0,5,0.1)
X = integr.odeint(f,np.array([0,1]),T)
plt.plot(T, X[:,0])
plt.show()
```

Le code python s'écrit pour $y(0)=1$, $y'(0)=0$: :

```
import numpy as np
import scipy.integrate as integr
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,t):
   return np.array([x[1],x[0]/(1+t**2)-t*x[1]/(1+t**2)])
T = np.arange(0,5,0.1)
X = integr.odeint(f,np.array([0,1]),T)
plt.plot(T, X[:,0])
plt.show()
```

La solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0)=0$ et $f'(0)=1$ semble être $f:t\mapsto t$. Un calcul évident permet de le vérifier.

2. On cherche l'autre solution sous la forme $g(t)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$ avec un rayon de convergence R non nul.

On obtient $g(0)=1=a_0$ et $g'(0)=0=a_1$.

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ en tant que somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, et $g'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}$ et, $g''(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$.

On injecte dans l'équation différentielle et on obtient :

$$\begin{aligned}(1+t^2)y''(t)+ty'(t)-y(t)=0 &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \\ &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \end{aligned}$$

On pose $k=n-2$ dans la première somme et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}t^k + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

On pose $n=k$ dans la première somme et on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

Donc, par unicité du développement en série entière, on obtient :

$$\forall n \in \mathcal{N},\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1)a_n = 0 \iff a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n$$

Étant donné que $a_1 = 0$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$.
Et, $a_{2n} = -\frac{2n-3}{2n}a_{2n-2} = +\frac{(2n-3)(2n-5)}{2n(2n-2)}a_{2n-4} = ... = (-1)^n\frac{(2n-3)(2n-5)...3.1}{2n(2n-2)...4.2}a_0 = (-1)^n\frac{(2n-3}{2n(2}$
puisque $a_0 = 1$.
Ainsi, $g(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)(2n-5)...3.1}{2n(2n-2)...4.2}t^{2n}$.
On remarque que $\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, le rayon de convergence de cette série entière est donc $R = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$.

3. Ainsi, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\boxed{g(t) =} 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)(2n-5)...3.1}{2n(2n-2)...4.2}t^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)(2n-5)...3.1}{2^n n(n-1)...2.1}t^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-}{}$$

Exercice n°81

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Tr}(A^n)z^n$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Solution :

$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ donc le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$$

avec $\lambda_1, \cdots \lambda_k$ des nombres complexes deux à deux distincts, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ des entiers strictement positifs.
Les λ_i sont les valeurs propres de A et les α_i leurs ordres de multiplicité respectifs.
Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les éléments diagonaux sont

$$\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \cdots, \lambda_2}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \cdots, \lambda_k}_{\alpha_k \text{ fois}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est semblable à T^n et T^n est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont

$$\underbrace{\lambda_1^n, \cdots, \lambda_1^n}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^n, \cdots, \lambda_2^n}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_k^n, \cdots, \lambda_k^n}_{\alpha_k \text{ fois}}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Tr}(A^n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i^n$.

La série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Tr}(A^n) z^n$ est donc la somme des séries entières $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_i \lambda_i^n z^n$ pour $i \in \{1, \cdots, k\}$. Son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal au minimum des rayons de convergence de ces séries entières. On note S la somme de la série enyière.
Or, la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_i \lambda_i^n z^n$ converge si et seulement si la série géométrique de raison $\lambda_i z$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $|\lambda_i z| < 1$ et sa somme vaut alors $\dfrac{\alpha_i}{1-\lambda_i z}$. Son rayon de convergence vaut $R_i = +\infty$ si $\lambda_i = 0$ et $R_i = \dfrac{1}{|\lambda_i|}$ sinon.
Si $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$, alors $R = +\infty$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $S(z) = p$;
Si $\operatorname{Sp}(A) \neq \{0\}$, alors $R \geqslant \dfrac{1}{\rho}$ où $\rho = \max\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\}$ et pour tout z tel que $|z| < \dfrac{1}{\rho}$,

$$S(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{1-\lambda_i z}$$

Comment montrer proprement en utilisant le programme que $R = \dfrac{1}{\rho}$ *?*

On remarque que $\dfrac{\chi_A'}{\chi_A} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{X-\lambda_i}$ donc

$$\forall z \in D_{\frac{1}{\rho}},\ z \neq 0,\ S(z) = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\frac{1}{z}-\lambda_i} = \frac{1}{z}\,\frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}$$

et $S(0) = p$.

Exercice n°82 RMS 2017 : n°976 Mines PC

Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n$.

Solution :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{\sin(n\theta)}{n!}\right| \leq \dfrac{1}{n!}$ donc le rayon est supérieur au rayon de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$, qui est infini : $\boxed{R = \infty}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} x^n\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xe^{i\theta})^n}{n!}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{xe^{i\theta}}\right)$
donc $f(x) = \operatorname{Im}\left(e^{x\cos(\theta)+ix\sin(\theta)}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{x\cos(\theta)}.e^{ix\sin(\theta)}\right) = e^{x\cos(\theta)} \sin\left(x\sin(\theta)\right)$

Exercice n°83 centrale 17-retour élève

Soit $n \in N^*$. Montrer l'existence d'un polynôme P_n de degré $n+1$, à coefficients positifs tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(\tan(x)) = \tan^{(n)}(x)$$

1. En déduire que la série de Taylor de $\tan x$ converge pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Montrer que $\tan(x)$ est développable en série entière sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.(*Indication en cours de planche : si* $0 \leq x < a < \frac{\pi}{2}$, *on pourra majorer* $\tan^{(n)}(x)$ *à l'aide de* $\tan a$.)
3. Montrer que $\tan(x)$ est développable en série entière sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Si $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur I , comment déterminer a_n ? Comment trouver une relation de récurrence entre les a_n.

Solution :

1. On montre sans difficulté l'existence de P_n par récurrence :
$P_0(X) = X, \quad P_1(X) = 1 + X^2, \quad P_{n+1}(X) = (1 + X^2)P_n'(X)$
(donc si P_n est à coeffs positifs, P_n' aussi et P_{n+1} aussi et $\deg(P_n) = n$ par récurrence)
2. Comme P_n est à coefficients positifs, les dérivées successives de tan sont positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
D'après le théorème de Taylor avec reste intégral, comme tan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \quad \text{où} \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \tan^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$
Toutes les dérivées de tan sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sont positives, donc $R_n(x) \geq 0$:
$\sum \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées (par $\tan x$) : donc elle converge.
Mais elle ne converge pas forcément vers $\tan x$ *!*
Si $0 \leq x < a < \frac{\pi}{2}$, en appliquant la formule de taylor avec reste intégral à tan entre x et a on a , comme toutes les derivées sont positives,
$\tan(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a-x)^k \tan^{(k)}(x)}{k!} + \int_x^a \frac{(a-t)^n}{n!} \tan^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{(a-x)^n}{n!} \tan^{(n)}(x).$
$$0 \leq \tan^{(n)}(x) \leq \frac{n!}{(a-x)^n} \tan(a)$$
On verifie d'autre part facilement que la fonction $h : t \mapsto \frac{x-t}{a-t}$ est strictement décroissante sur $[0, x]$
On a donc $\forall t \in [0, x,] \quad 0 \leq h(t) \leq \frac{x}{a}$ d'où $0 \leq (h(t))^n \leq \left(\frac{x}{a}\right)^n$
On a donc si $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x < a < \frac{\pi}{2}$,
$0 \leq R_n(x) \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{(n+1)!\tan(a)}{(a-t)^{n+1}} \mathrm{d}t \leq \tan(a) \left(\frac{x}{a}\right)^n (n+1) \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)} = K \left(\frac{x}{a}\right)^n (n+1)$ où K ne dépend que de x et a.
Par croissances comparées, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n (n+1) = 0$ car $x < a$ et par encadrement $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
On en déduit que tan est somme de sa série de Taylor sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\quad -x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ d'où $\tan(x) = -\tan(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$
Comme la fonction tan est impaire,
pour tout entier naturel n pair, $\tan^{(n)}$ est une fonction impaire donc $(-1)^{n+1} \tan^{(n)}(0) = 0 = \tan^{(n)}(0)$

et pour tout entier naturel impair, $(-1)^{n+1}\tan^{(n)}(0)=\tan^{(n)}(0)$. Finalement,

$$\forall x\in I,\quad \tan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(0)}{n!}x^n$$

4. On note pour tout entier n, $\quad a_n=\dfrac{\tan^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{P_n(0)}{n!}$.

   on a $\forall x\in I,\quad \tan'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\tan(x)^2=1+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ où $b_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\,a_{n-k}$

   Par unicité du développement en série entière de $\tan'(x)$, on a :

   $\begin{cases} a_1=1+a_0^2=1\\ \forall n\geq 1,\quad (n+1)a_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\end{cases}$

Exercice n°84 RMS 2017 n°1013 : Centrale

Soit $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2^n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Pour $x\in]-R,R[$, exprimer $f(x^2)$ en fonction de $f(x)$ et x. En déduire la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque $x\to R^-$.
3. On suppose qu'il existe $\alpha\in]-R,R[$ tel que $f(\alpha)>1/2$. Montrer que f n'admet pas de limite en R^-.

Solution :

1. Si $x=1$, la série diverge grossièrement. Donc $R\leqslant 1$.
   Pour $|x|<1$, il s'agit d'une série alternée pour $n\geqslant 1$ et $|x|^{2^n}$ tend vers zéro en décroissant. Donc, d'après le TCSA, la série converge et $R=1$.
2. $$f(x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{2^n}=x-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2^n}=x-f(x)$$
   Ainsi, si f admet une limite ℓ en 1, celle-ci vérifie $\ell=1-\ell$ donc $\ell=\dfrac{1}{2}$.
3. $f(\alpha)=\alpha+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\alpha^{2^n}$. Le reste étant négatif, $\alpha>f(\alpha)>\dfrac{1}{2}$.
   Considérons $u_n=\alpha^{\frac{1}{2^n}}$. (u_n) converge vers 1 en croissant.
   $u_n-f(u_n)=f(u_n^2)=f(\alpha^{\frac{2}{2^n}})=f(\alpha^{\frac{1}{2^{n-1}}})=f(u_{n-1})$.
   Donc $u_{n+1}-u_n=f(u_{n+1})+f(u_n)-(f(u_n)+f(u_{n-1}))=f(u_{n+1})-f(u_{n-1})$.
   Ainsi $(f(u_{2n}))$ et $(f(u_{2n-1}))$ sont croissantes. Or $f(u_0)=f(\alpha)$. Donc pour tout n, $f(u_{2n})>1/2$. Cela signifie donc que $f(u_{2n})$ ne peut pas converger vers $\dfrac{1}{2}$, limite éventuelle en 1.

Exercice n°85 RMS 2017 n°817 : Mines

On définit la suite (a_n) par $a_0=1$ et, pour tout n, $a_n=\dfrac{-1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n-k}}{k!}$.

1. Montrer que, pour tout n, $a_n\in\mathbb{Q}$.
2. Soit $f:z\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de cette série est $\geqslant 1$.

(b) Montrer que, si $|z|<1$, $f(z)=\dfrac{2}{e^z+1}$.

(c) En déduire que $R=\pi$.

(d) (Ajout du rédacteur : montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $a_{2n}=0$.)

Solution :

1. Il suffit de réaliser une récurrence forte.
2. (a) On montre de nouveau par récurrence forte que, pour tout n, $|a_n|\leqslant 1$. Donc $R\geqslant 1$.

   (b) Pour $n\geqslant 1$, $-a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{k!}$. On reconnait le coefficient d'une série produit de Cauchy où interviennent les coefficients de f et de l'exponentielle. Comme le rayon de convergence de la série entière de l'exponentielle est infini, on a, pour tout $|z|<1$, par convergence absolue des séries entières, $2a_0-f(z)=f(z)e^z$. Soit $f(z)=\dfrac{2}{e^z+1}$

   (c) $f(z)=\dfrac{2e^{-z/2}}{e^{z/2}+e^{-z/2}}$. On pose alors $-z/2=i\theta$. Donc $f(-2i\theta)=\dfrac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ quand cela a un sens. C'est-à-dire $1+i\tan(\theta)$.
   Comme f est continue sur $]-R,R[$, $\theta\in]-\pi/2,\pi/2[$ donc $|z|<\pi$

   (d) $f(-z)+f(z)=2$ donc $f(-z)-1=1-f(z)$. La fonction $f(z)-1$ est impaire d'où le résultat.

Exercice n°86

Soit $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2^n}$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

b) Pour $x\in]-R,R[$, exprimer $f(x^2)$ en fonction de $f(x)$ et x. En déduire la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque $x\to R^-$.

c) On suppose qu'existe $\alpha\in]-R,R[$ tel que $f(\alpha)>1/2$. Montrer que f n'admet pas de limite en R^-.

Solution :

a) Posons $f(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}a_px^p$ avec $a_p=(-1)^n$ si $p=2^n$ et 0 sinon.
La suite (a_p) est bornée donc $R\geq 1$. De plus, a_p ne tend pas vers 0 donc $R\leq 1$.
En conclusion, $R=1$.

b) $f(x^2)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x^2)^{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{2^n}$. On en déduit que $f(x^2)=-(f(x)-x)$.
Si f admet une limite en 1^-, celle ci sera donc égale à $1/2$.

c) Si on écrit $f(x)=(x-x^2)+(x^4-x^8)+...=x(1-x)+x^4(1-x^4)+...$, on voit que f est positive pour $x\geq 0$ et si on écrit $f(x)=x+(-x^2+x^4)+(-x^8+x^{16})+...$ on voit que f est négative pour $x\leq 0$. Par conséquent $\alpha\in]0,1[$.
De plus,
$f(\sqrt{\alpha})+f(\alpha)=\sqrt{\alpha}$
$f(\sqrt[4]{\alpha})+f(\sqrt{\alpha})=\sqrt[4]{\alpha}$
Si l'on soustrait ces deux égalités, on obtient : $f(\sqrt[4]{\alpha})-f(\alpha)=\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt{\alpha}>0$.
Donc $f(\sqrt[4]{\alpha})>f(\alpha)>1/2$. On peut donc réitérer ce raisonnement et l'on obtient $f(\sqrt[16]{\alpha})>f(\alpha)>1/2$ et en généralisant $f(\alpha^{1/4^n})>f(\alpha)>1/2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui est contradictoire avec $\lim f(x)=1/2$ lorsque $x\to 1$.

Exercice n°87 Mines 2017 - RMS 971

Développer en série entière au voisinage de 0, $x \longmapsto \ln(x^2+\sqrt{2}x+1)$.

Solution :

Notons f la fonction définie par $f(x)=\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)$.
Or la fonction $x \longmapsto x^2+\sqrt{2}x+1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto 2x+\sqrt{2}$.
Alors $x \longmapsto x^2+\sqrt{2}x+1$ est décroissante sur $\left]-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et croissante sur $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+\sqrt{2}x+1 \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

◇ Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\dfrac{1}{x+e^{-i\frac{\pi}{4}}}+\dfrac{1}{x+e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

Or $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{x+e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1+xe^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{4}}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-xe^{i\frac{\pi}{4}}\right)^k$.

Et $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{x+e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1+xe^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-xe^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^k$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \forall x \in]-1,1[,\ f'(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{4}}\left(-xe^{i\frac{\pi}{4}}\right)^k + e^{-\frac{\pi}{4}}\left(-xe^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-x)^k\left(e^{i(k+1)\frac{\pi}{4}}+e^{-i(k+1)\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-x)^k 2\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Donc f' est développable en série entière au voisinage de 0.

◇ Donc f est développable en série entière et

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-2}{k+1}-\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{4}\right)(-x)^{k+1}$$

Exercice n°88 Centrale PSI 2015 - Site Centrale

On pose

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n \text{ et } g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$$

1. Déterminer les rayons de convergence de f et de g.
2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.
3. Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
4. Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $[-1,1[$.
5. Trouver des équivalents de f et g en 1.

Solution :

1. Appliquons la règle de d'Alembert, pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\frac{\ln(n+1)|x|^{n+1}}{\ln n|x|^n}\underset{n\to\infty}{\sim}|x|$$

On en déduit que le rayon de convergence de f est $R = 1$.
De même pour l'autre série pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}\right| = \frac{\ln(1-\frac{1}{n+1})|x|^{n+1}}{\ln(1-\frac{1}{n})|x|^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}|x| \underset{n\to\infty}{\sim} |x|$$

On en déduit que le rayon de convergence de g est $R = 1$ également.

2. D'après les théorèmes sur les séries entières, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment inclus dans le disque ouvert de convergence qui est $]-1,1[$ (ou la convergence de la série de fonctions est normale).
   Reste à prouver que $g(-1)$ existe et que g est continue en -1.
   La série $\sum g_n(-1)$ est une série alternée vérifiant les hypothèses du critère spéciale des séries alternées car $\left(\ln(1-\dfrac{1}{n})\right)_n$ décroit vers 0 donc cette série converge.
   Montrons que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[-1,0]$ à l'aide du critère spéciale des séries alternées encore une fois.
   En effet, pour $x \in [-1,0]$, la suite $\left(\ln(1-\dfrac{1}{n})x^n\right)_n$ décroit vers 0 et donc :

$$|R_n(x)| \leqslant |g_{n+1}(x)| = \ln(1-\frac{1}{n+1})|x|^{n+1} \leqslant \ln(1-\frac{1}{n+1})$$

   Donc $\|R_n\|_{\infty,[-1,0]} \to 0$ et la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $[-1,0]$ ce qui assure la continuité en $x = 1$.
   Finalement g est définie et continue sur $[-1,1[$.
3. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} \ln(n-1)x^n$$

   Donc

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)x^n = -\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n = -g(x)$$

4. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, reste à calculer la limite de g en -1. D'après ce qui précède :

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{-g(x)}{1-x} = -\frac{1}{2}g(-1)$$

   Ainsi f peut être prolongée en une fonction continue sur $[-1,1[$.
5. Pour les équivalents en $x = 1$, la relation trouvé au **3.** permet de déduire les équivalents l'un de l'autre. On va donc chercher plutôt celui de g car son terme général se prête facilement à un développement limité :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n$$

   Comme chaque série converge :

$$g(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)x^n$$

   On remarque que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x) - x$.

   On a aussi la convergence normale sur $[-1,1]$ de la série de fonctions associée à la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)x^n$, donc cette quantité est bornée au voisinage de 1.
   On en déduit que

$$g(x) = \ln(1-x) + x + O(1) \underset{x\to1}{\sim} \ln(1-x) \Rightarrow f(x) \underset{x\to1}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

Exercice n°89 ODLT 2017 - planche 96 - Mines Ponts - exo 2

1. Trouver une solution développable en série entière et valant 1 en 0, de $2xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0$. Quel est son rayon de convergence ?
2. Exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles.

Solution :

1. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$, avec $R > 0$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

donc

$$\begin{aligned} 2xf''(x) + f'(x) - f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2(n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)n a_{n+1} x^n - 0 \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+1)(n+1)a_{n+1} - a_n) x^n \end{aligned}$$

Analyse : S'il existe une fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 0$, qui soit solution du problème posé, alors :
— comme $f(0) = 1$, on a $a_0 = 1$
— Comme, pour tout $x \in]-R, R[$, $2xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0$, on a, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+1)(n+1)a_{n+1} - a_n) x^n = 0.$$

D'où, comme 0 est son propre développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, on a, par unicité du développement en série entière sur $]-R, R[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+1)(n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(n+1)}.$$

Une récurrence immédiate donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{n! \prod_{i=1}^{n} (2i-1)} = \frac{2^n n!}{n!(2n)!} = \frac{2^n}{(2n)!}.$$

Donc, si f existe, alors $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^n$.

Synthèse : Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2^n}{(2n)!} \neq 0$ et

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n}{(2n)!}} = \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

d'après le critère de d'Alembert, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et, apr l'analyse, est solution.

Conclusion : Par analyse synthèse, $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^n$ est donc bien l'unique solution du problème posé développable en série entière, et, comme son rayon de convergence est $+\infty$, elle est solution sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2x})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{2x})$$

et, pour tout $x \leq 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-2x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-2x}).$$

Exercice n°90 Centrale 2017

Soit a un réel positif ou nul. On considère l'équation différentielle sur $]-1, 1[$:

$$(E) \qquad (1-x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0.$$

1. Intégrer (E) pour $a = 0$.
2. Pour $a > 0$, donner une base des solutions sous forme de séries entières.
   À quelle condition un polynôme non nul est-il solution ? Le donner dans le cas où $a = 2$.
3. ?

Solution :

1. Pour $a = 0$, y' est solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre $y'' - \frac{x}{1-x^2} y' = 0$.
   On calcule $\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C^{\text{te}}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$.
   Il en découle qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = \lambda \arcsin x + \mu$.
2. Pour $a > 0$ on cherche une solution sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, en supposant le rayon de convergence strictement positif. On calcule $(1-x^2)y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$ et $xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ donc y est solution de (E) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (a^2 - n^2)a_n = 0$, soit encore : $a_{n+2} = \frac{(n-a)(n+a)}{(n+2)(n+1)} a_n$.
   Définissons maintenant les suites (u_n) et (v_n) en posant $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} = \frac{(2k-a)(2k+a)}{(2k+2)(2k+1)} u_k \qquad \text{et} \qquad v_{k+1} = \frac{(2k+1-a)(2k+1+a)}{(2k+3)(2k+2)} v_k$$

ainsi que les séries entières $u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^{2k}$ et $v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k x^{2k+1}$. Le critère de d'Alembert prouve que ces deux séries entières ont un rayon de convergence égal à 1. Enfin, le calcul précédent montre que toute solution développable en série entière s'écrit $y = a_0 u + a_1 v$.

Puisque (u, v) est une famille libre (l'une est paire, l'autre impaire), elle forme une base de l'espace des solutions de (E).

Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution, avec $a_{2p} = a_0 u_p$ et $a_{2p+1} = a_1 v_p$. Pour que y soit un polynôme, il faut et il suffit que la suite (a_n) soit nulle à partir d'un certain rang.

— Lorsque $a \notin \mathbb{N}$, ni la suite (u_k) ni la suite (v_k) ne s'annulent, donc il n'existe pas de polynôme solution.
— Lorsque $a \in (2\mathbb{N})$, la suite (u_k) s'annule mais pas (v_k), donc y est un polynôme lorsque $a_1 = 0$, et dans ce cas $y = a_0 \sum_{k=0}^{p} u_k x^{2k}$ en ayant posé $a = 2p$.
— Lorsque $a \in (2\mathbb{N} + 1)$, la suite (v_k) s'annule mais pas (u_k), donc y est un polynôme lorsque $a_0 = 0$, et dans ce cas $y = a_1 \sum_{k=0}^{p} v_k x^{2k+1}$ en ayant posé $a = 2p + 1$.

Ainsi, pour $a = 2$, les polynômes solutions sont de la forme $y = a_0(u_0 + u_1 x^2) = a_0(1 - 2x^2)$.

Exercice n°91 Planche BEOS 3110 Centrale PC 2017

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.

1. Donner la loi de S_n.
2. Dans quelle mesure peut-on dire que S_n/n est proche de p ?

   (Puis : démontrer la loi faible des grands nombres.)

   Soit $t \in \mathbb{N}$. On lui associe la variable aléatoire $N_t = \text{card}\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, S_k \leq t\}$.

   On remarque alors l'égalité $[N_t = k] = [S_k = t] \cap [S_{k+1} > t]$.
3. Déterminer la loi de N_t.
4. Déterminer la fonction génératrice de N_t.

Solution :

1. Cette question peut se démontrer en utilisant dans sa démonstration le lemme des coalitions, à savoir ici, pour une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_{n+1} est indépendantes de toutes fonctions de n autres variables aléatoires extraites de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, en particulier, X_{n+1} est indépendantes de $X_1 + ... + X_n$. On peut alors faire ici une démonstration par récurrence sur n l'hérédité découlant de ce lemme des coalitions.

   On peut également faire un raisonnement direct ce qui est le plus simple ici.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1 + ... + X_n$ prend toutes les valeurs entre 0 et n, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

   $$P(X_1 + ... + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

   puisque l'on reconnaît le nombre de succès nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes.
2. Étant donné que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ admettant donc un moment d'ordre 2, alors, en posant $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $\mathcal{E}(X_1) = p$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

   $$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

   Démonstration de la loi faible des grands nombres :

   Par combinaison linéaire, comme chaque X_k a une espérance, si on pose $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} S_n$ a une espérance, et par linéarité de l'espérance, on a alors : $\mathcal{E}\big(\overline{X}_n\big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}(X_k) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m = m.$

   Comme chaque X_k a une variance, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ a une variance, et comme les X_k sont deux à deux indépendants, on a $\mathcal{V}(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathcal{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} pq = npq$. Donc $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} S_n$ a une variance, et $\mathcal{V}\big(\overline{X}_n\big) = \dfrac{1}{n^2}\mathcal{V}(S_n) = \dfrac{pq}{n}$.

   Pour finir, on applique l'inégalité de Biénaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $\overline{X}_n$: pour tout $\varepsilon > 0$,

   $$\mathbb{P}\Big(\big|\overline{X}_n - m\big| \geq \varepsilon\Big) = \mathbb{P}\Big(\big|\overline{X}_n - \mathcal{E}\big(\overline{X}_n\big)\big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathcal{V}\big(\overline{X}_n\big)}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0$ et qu'une probabilité est toujours positive, le théorème des gendarmes permet de conclure.

Soit $t \in \mathbb{N}$. On lui associe la variable aléatoire

$$N_t = \mathrm{card}\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, S_k \leq t\}.$$

On remarque alors l'égalité $[N_t = k] = [S_k = t] \cap [S_{k+1} > t]$.

3. Soit $t \in \mathbb{N}$, $\boxed{N_t \text{ prend toutes les valeurs de } [\![t, +\infty[\![}$, et pour tout $k \in [\![t, +\infty[\![$,

$$\begin{aligned} \boxed{P(N_t = k)} &= P([S_k = t] \cap [X_{k+1} + S_k > t]) = P([S_k = t] \cap [X_{k+1} > 0]) \\ &= P([S_k = t] \cap [X_{k+1} = 1]) \quad \text{car, } X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \\ &= P([S_k = t]).P([X_{k+1} = 1]) \quad \text{d'après le lemme des coalitions} \\ &= \binom{k}{t} p^t q^{k-t}.p = \boxed{\binom{k}{t} p^{t+1} q^{k-t}} \end{aligned}.$$

4. La fonction génératrice de N_t est définie par

$$\begin{aligned} G_{N_t}(s) = & \ \mathcal{E}\left(s^{N_t}\right) = \sum_{k=t}^{+\infty} P(N_t = k) s^k \\ = & \ \sum_{k=t}^{+\infty} \binom{k}{t} p^{t+1} q^{k-t} s^k \end{aligned}.$$

On rappelle que la série entière $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ avec un rayon de convergence $R = 1$, cette série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^t$ sur son intervalle ouvert de convergence à savoir $]-1, 1[$.

Et, $\displaystyle\sum_{k=t}^{+\infty} \frac{k!}{(k-t)!} u^{k-t} = \frac{t!}{(1-u)^{1+t}} \iff \sum_{k=t}^{+\infty} \binom{k}{t!} u^{k-t} = \frac{1}{(1-u)^{1+t}}$.

Pour tout s tel que $|qs| < 1 \iff |s| < \dfrac{1}{q}$ (valable si $p \in]0, 1[$ ce que l'on supposera ici),

$$G_{N_t}(s) = p^{t+1} s^t \sum_{k=t}^{+\infty} (qs)^{k-t} = \frac{p^{t+1} s^t}{(1-qs)^{1+t}}$$

Exercice n°92 RMS Mines PC 2017

Le nombre de voitures allant à (respectivement venant de) Paris qui s'arrêtent à un péage d'autoroute en une journée est une variable aléatoire X (resp. Y) qui suit une loi de Poisson de paramètre λ (resp. μ).
Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leqslant n$. Si n voitures se sont arrêtées au péage dans la journée, quelle est la probabilité que k voitures soient allées à Paris ?

Solution :

X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y suit une loi de Poisson de paramètre μ. Il est raisonnable de supposer que de plus X et Y sont indépendantes. Donc $X + Y$ une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
On cherche $P(X = k / X + Y = n)$.

$$\begin{aligned} P(X = k / X + Y = n) &= \frac{P((X = k) \cap (X + Y = n))}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k) P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k) P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{e^{-\lambda-\mu} (\lambda + \mu)^n} \\ &= \binom{k}{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Exercice n°93 RMS 2017 n°1006 : Mines PC

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique.

Trouver la probabilité que $\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ soit nilpotente.

Solution :

Une matrice M 2×2 est nilpotente ssi $M^2 = 0$.

Or $M = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ donne $M^2 = \begin{pmatrix} X^2 - XY & X^2 - XY \\ Y^2 - XY & Y^2 - XY \end{pmatrix}$.

Donc la matrice est nilpotente $\Leftrightarrow Y^2 - XY = 0 = X^2 - XY \Leftrightarrow X^2 = XY = Y^2 \Leftrightarrow X = Y$ (X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*\ldots$)

Alors la probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=Y=k)$ par événements incompatibles

donc $\mathbb{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k, Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k).\mathbb{P}(Y=k)$ par indépendance.

On a alors $\mathbb{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2(k-1)} = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} (q^2)^k = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}$.

Remarque : On a de même, (ex RMS 2017 n°1015),

$$\mathbb{P}\left(\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}\right) = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X=Y) = 1 - \frac{p}{1+q} = \frac{1-p+q}{1+q} = \frac{2q}{1+q}.$$

Exercice n°94 RMS 2017 n°1014 : Mines PC

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

Trouver la probabilité que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Solution :

On sait que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable ssi $X \neq Y$ (car elle aura alors deux VP distinctes, et sinon une seule VP, et si elle était diagonalisable, elle serait semblable, donc **égale** à $X.I_2\ldots$)

d'où $\mathbb{P}\left(\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}\right) = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X=Y)$

Or $\mathbb{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=Y=k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)$ par incompatibilité puis indépendance.

d'où $\mathbb{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$ par la formule de Van der Mond.

justifiée en calculant le coeff de X^n *dans* $(1+X)^{2n} = (1+X)^n \times (1+X)^n\ldots$

Exercice n°95 centrale 17-retour élève Un métro circule sur une rame de 4 stations numéritées de 0 à 3. Quand il arrive à la station n° 3 il fait demi tour, de même à la station n° 0.

On suppose qu'il passe 1mn à chaque station avec un temps de trajet négligeable entre deux stations. (*traduction : à t=0, il est à la station 0, à t=1 à la station 1,...)*

Un voyageur s'endort à la station n° 0. Son temps de sommeil T suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note X la station à laquelle il se réveille. Déterminer la loi de X.

bonus : On note Y le nombre d'aller-retours effectués. Déterminer la loi de Y.

Solution :

$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. On note $q = 1-p$.

$$P(X=0)=P(T\in 6\mathbb{N}^*)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=6k)=\sum_{k=1}^{+\infty}q^{6k-1}p=\frac{pq^5}{1-q^6}.$$
$$P(X=1)=P(T\in(6\mathbb{N}+1)\cup(6\mathbb{N}+5))=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=6k+1)+\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=6k+5)=\frac{p+pq^4}{1-q^6}$$
$$P(X=2)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=6k+2)+\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=6k+4)=\frac{p(q^3+q)}{1-q^6}.$$
$$P(X=3)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=6k+3)=\frac{pq^2}{1-q^6}.$$
$Y(\Omega)\in\mathbb{N}$.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\quad Y=k\Leftrightarrow T=6k+r\;$ avec $r\in\{0,1,2,3,4,5\}$
Si $k\in\mathbb{N}^*$, $\quad P(Y=k)=p\displaystyle\sum_{j=0}^{5}q^{6k-1+j}=q^{6k-1}(1-q^6)$
Si $k=0$, $P(Y=0)=P(T\in\{1,2,3,4,5\})=\displaystyle\sum_{j=0}^{5}pq^{6k-1+j}=1-q^5$.

Exercice n°96 RMS 2017 n°1030 : Centrale

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On considère $2n$ équipes sportives, n en première division et n en seconde division. On organise n matchs.

1. Soit a_n la probabilité d'avoir systématiquement une équipe de première division face à une équipe de seconde division. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Etudier la convergence de la suite a_n

Solution :

1. Calculons le nombre de cas possibles :
Pour créer n matchs, on choisit 2 équipes parmi $2n$ puis 2 équipes parmi $2n-2$ puis 2 équipes parmi $2n-4$ et ainsi de suite jusqu'à 2 équipes parmi 2.
On obtient donc $\dfrac{2n(2n-1)}{2}\dfrac{(2n-2)(2n-3)}{2}\dots\dfrac{2\times 1}{2}=\dfrac{(2n)!}{2^n}$.
Calculons le nombre de cas favorables :
Cette fois-ci, on choisit 1 équipe parmi n et 1 équipe parmi puis 1 équipe parmi $n-1$ et 1 équipe parmi $n-1$ et ainsi de suite.
On obtient alors $n^2\times(n-1)^2\times\ldots\times 1^2=(n!)^2$.
$a_n=\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$
2. En utilisant la formule de Stirling, $a_n\sim\dfrac{2^n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\times 2\pi n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}\sim\dfrac{\sqrt{\pi n}}{2^n}$ qui converge vers 0.

Exercice n°97 RMS 2017 n°855 : Mines

Soient $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. On suppose que $P(X_{i,j}=1)=P(X_{i,j}=-1)=1/2$. On note M la matrice $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Calculer l'espérance de $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Calculer l'espérance de $\det(M)$.
3. Calculer la probabilité que M soit de rang 1.

Solution :

1. $E(\sum_i X_{i,i}) = \sum_i E(X_{i,i}) = 0$
2. Si on développe complètement le déterminant, on obtient une somme de produits de variables aléatoires. Or celles-ci sont indépendantes. Donc l'espérance du produit est égale au produit des espérances soit 0.
3. Cela signifie que chaque colonne $C_2, \ldots, C_n$ est égale à $\pm C_1$.
   Il y a 2^{n^2} manières de construire une matrice quelconque, 2^n manières de construire C_1 et 2 manières de construire C_2 à partir de C_1 et ainsi de suite.
   Ainsi la probabilité cherchée est $2^n \times 2^{n-1}/2^{n^2} = 1/2^{(n-1)^2}$.

Exercice n°98

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique. Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ soit nilpotente.

Solution :

Tout d'abord remarquons qu'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & a \\ -b & -b \end{pmatrix}$ est de rang 1 et qu'elle est nilpotente (si on calcule son carré) que si et seulement si $a = b$.
Le problème se ramène donc à calculer la probabilité de l'évènement $X = Y$.

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k, Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)P(Y=k) \quad \texttt{car elles sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2(k-1)} p^2 \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)^2)^k \\
&= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} \\
&= \frac{p}{2-p}
\end{aligned}$$

Exercice n°99 Mines-Pont 2017 : BEOS -3112

On téléphone à n personnes. Chaque personne a une probabilité p de répondre à l'appel. On note X_1 le nombre de personnes qui répondent à ce premier appel.
On effectue ensuite une deuxième vague d'appels à destination des personnes qui n'ont pas répondu la première fois. On note X_2 le nombre de personnes qui répondent au deuxième appel.
On répète le processus jusqu'à ce que tout le monde ait répondu. Pour tout j dans $\{1, \cdots, n\}$, on note Y_j le numéro de l'appel auquel la $j^{\text{ème}}$ personne a répondu. A chaque appel, une personne donnée a une probabilité p de répondre.

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Donner la loi de Y_j.
3. Déterminer les lois de X_1 et X_2.

Solution :

1. Remarquons que $X_1(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et que $X_1(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Par contre l'événement $(X_1 = n) \cap (X_2 = n)$ est impossible. Et $P(X_1 = n) = p^n$ et $P(X_2 = n) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = n)) = (pq)^n$.
Donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
2. Y_j est le nombre d'appels effectués pour que la personne j réponde la première fois. Donc pour tout entier k, $(Y_j = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{R_i} \bigcap R_k$, où R_i est l'événement la personne j répond au $i^{\text{ème}}$ appel.
Alors $P(Y_j = k) = q^{k-1}p$.
Donc Y_j suit une loi géométrique de paramètre p.
3. ◇ Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
&(X_1 = k)\\
&= \bigcup_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (Y_1 > 1) \cap \cdots \cap (Y_{i_1} > 1) \cap (Y_{i_1} = 1) \cap (Y_{i_1+1} > 1) \cap \cdots\\
&\quad \cap (Y_{i_k - 1} > 1) \cap (Y_{i_k} = 1) \cap (Y_{i_k+1} > 1) \cap \cdots \cap (Y_n > 1)
\end{aligned}$$

Par incompatibilité des événements et par indépendance des appels à chaque personne $P(X_1 = k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
Donc X_1 suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

◇ Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
D'après la formule des probabilités totales appliquée à $(X_2 = k)$ avec les système complet d'événements associé à X_1,

$$P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{n} P\big((X_1 = i) \cap (X_2 = k)\big)$$

Or si $i \geqslant n - k + 1$, $P((X_1 = i) \cap (X_2 = k)) = 0$.
Et si $i \in \{0, n-k\}$, $P((X_1 = i) \cap (X_2 = k)) = P(X_1 = i) P_{X_1 = i}(X_2 = k) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{k} p^k q^{n-i-k}$, car la loi de X_2 conditionnellement à $X_1 = i$ suit la même loi que X_1 mais pour les $n - i$ personnes appelées uniquement.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } P(X_2 = k) &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{k} p^k q^{n-i-k}\\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{n!}{i!(n-k-i)!k!} p^i q^{n-i} p^k q^{n-i-k}\\
&= \binom{n}{k} (pq)^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} p^i (q^2)^{n-k-i}\\
&= \binom{n}{k} (pq)^k (p + q^2)^{n-k}
\end{aligned}$$

Donc X_2 suit une loi binomiale de paramètre (n, pq).

Exercice n°100 (Mines 2017)

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suit la loi géométrique de paramètre p. On dispose d'une urne contenant une boule bleue et une boule verte. On tire avec remise une boule N fois. Soit X la variable aléatoire liée au nombre de boules bleues tirées.

1. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $N = n$. Reconnaître alors la loi de X sachant que $N = n$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi : x \mapsto \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} x^n$. Déterminer le rayon, le domaine de convergence et la somme de la série entiére.

3. Calculer la probabilté de X. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution :
Soit X le nombre de de boules bleues tirées. Si n est fixé, la loi conditionnelle de X sachant $N = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $1/2$. On obtient, pour $k \in \mathbb{N}$: si k^2n, alors $P(X = k|N = n) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$ et $P(X = k|N = n) = 0$ si $k > n$.

En dérivant m fois l'identité $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, on obtient que le rayon de convergence de la série entiére est 1 et

$$\forall x \in]-1, 1[, \; \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} x^n = \varphi(x).$$

Par application de la formule des probabiltés totales, on obtient pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} pq^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

On a vu que

$$\forall x \in]-1, 1[, \; \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

$$P(X = k) = \frac{p(\frac{q}{2})^k}{\left(1-\frac{q}{2}\right)^{k+1}} = (1 - \frac{2p}{2-q})^k \frac{p}{1-\frac{q}{2}}.$$

On obtient que $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2p}{2-q} = \frac{2p}{1+p}$ donc X admet une espèrance. Comme $E(X+1) = \frac{1+p}{2p} = E(X) + 1$, alors $E(X) = \frac{1+p}{2p} - 1 = \frac{1-p}{2p}$.

Exercice n°101 Mines-Ponts PSI 2016 - BEOS UPS

Dans une urne, on a des boules distinctes $B_1, \ldots, B_n$ $(n \geqslant 2)$ que l'on tire successivement et avec remise. Soit Y_r la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel $B_1, \ldots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

1. Déterminer la loi, l'espérance, la variance de Y_1.
2. Préciser $Y_r(\Omega)$. Que valent $P(Y_r = r)$ et $P(Y_r = r+1)$?
3. On fixe r. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ soient sorties (ainsi, $W_r = Y_r$). On pose $X_1 = W_1$ et $X_i = W_i - W_{i-1}$ si $i \geqslant 2$.
   (a) Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.
   En déduire l'espérance de Y_r.
   (b) Trouver un équivalent de Y_n quand $n \to +\infty$.

Solution :

1. $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y_1 = k$ signifie que B_1 a été tiré exactement au k-ième tirage et pas avant. Il s'agit du rang d'attente de B_1 lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. On reconnait donc une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.
   On a $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{n})$ et donc $E(Y_1) = n$ et $V(Y_1) = \frac{1}{(\frac{1}{n})^2} - \frac{1}{(\frac{1}{n})} = n^2 - n$.

2. $Y_r(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{1,\dots,r-1\}$ (le premier rang possible est au moins égal au nombre de boules à tirer...)
$Y_r = r$ signifie que les r boules ont été tirées exactement une fois en r tirages. Il y a n^r tirages possibles parmi lesquels exactement $r!$ ont été favorables ainsi $p(Y_r = r) = \dfrac{r!}{n^r}$.
$Y_r = r+1$ signifie que les r boules ont été tirées exactement une fois en $r+1$ tirages, calculons plutôt $p(Y_r \leqslant r+1)$.
Il y a $\dbinom{r+1}{r} r!(n-r)$ tirages comportant les r boules à placer ainsi qu'une boule portant un autre numéro strictement plus grand que r. (on place r boules parmi $r+1$ positions, en tenant compte de l'ordre de tirage de ces boules, et $n-r$ choix pour la dernière restante).
Il y a $r\dbinom{r+1}{2}(r-1)!$ tirages comportant les r boules à placer ainsi qu'une boule portant un autre numéro inférieur ou égal à r. (il y a r choix possibles pour le couple de boules identiques, ce couple étant à placer parmi $r+1$ positions, en tenant compte de l'ordre de tirage des $r-1$ boules restantes).
Ainsi
$$p(Y_r \leqslant r+1) = \frac{\binom{r+1}{r} r!(n-r) + r\binom{r+1}{2}(r-1)!}{n^{r+1}} = \frac{(r+1)!(n-\frac{r}{2})}{n^{r+1}}$$
et donc
$$p(Y_r = r+1) = p(Y_r \leqslant r+1) - p(Y_r = r) = \frac{(r+1)!(n-\frac{r}{2})}{n^{r+1}} - \frac{r!}{n^r}$$

3. (a) $X_i = k$ avec $k \geqslant 1$ signifie $W_i = W_{i-1} + k$ c'est à dire qu'entre le tirage numéro $W_{i-1}+1$ et le tirage numéro W_i il n'y a eu aucune nouvelle boule tirée parmi les $r-i$ restantes excepté la dernière, ce qui arrive alors avec une probabilité de $\dfrac{r-i+1}{n}$ donc
$$p(X_i = k) = \left(\frac{n-(r-i+1)}{n}\right)^k \times \frac{r-i+1}{n}$$
Il s'agit du temps d'attente pour l'obtention d'une nouvelle boule donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(\dfrac{r-i+1}{n})$ et ainsi $E(X_i) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{n}{r-i+1}$.
Ainsi $Y_r = W_r$ et $\displaystyle\sum_{i=2}^{r} X_i = \sum_{i=2}^{r}(W_i - W_{i-1}) + W_i = W_r$.
On a alors $E(Y_r) = E(W_r) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} E(X_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{r-i+1} = n\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}$.
(b) Si $r = n$ alors $E(Y_n) = n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \sim n\ln n$ d'après le cours sur les séries.

Exercice n°102 ODLT - planche 103 - Mines Ponts 2017 - exo 2
Une machine met n pièces dans n boites, chaque pièce pouvant aller dans chaque boite de manière équiprobable. Quelle proportion y de boites vides aura-t-on si n est très grand ?

Solution :
Numérotons les boites $B_1,\dots,B_n$ et notons X_k la variable qui vaut :
— 1 si la boite B_k est vide à l'issue de l'expérience
— 0 sinon
$X_k(\Omega) = \{0,1\}$, donc X_k suit une loi de Bernoulli. Notons N la variable aléatoire égale au nombre de boites vides à l'issue de l'expérience, et Y la variable aléatoire égale à la proportion de boites vides à l'issue de l'expérience. On a alors :
$$N = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } Y = N/n.$$

• Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, soit Z_k la variable aléatoire égale au nombre de pièces dans la boite k à l'issue de l'expérience. Comme toutes les pièces sont mises indépendamment les unes des autres dans les boites, avec la même probabilité $1/n$ d'être dans la boite B_k, on a $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/n)$ et

$$P(X_k = 1) = P(Z_k = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

On a donc $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Par suite, X_k admet une espérance et $E(X_k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

• $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance,

$$E(N) \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Par suite, $Y = N/n$ admet une espérance et

$$E(Y) = \frac{E(N)}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\underbrace{\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)}_{\sim n \times (-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\to} -1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, la proportion moyenne de boites vides tend vers e^{-1}.

Remarque :

On peut aller plus loin et montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Y - e^{-1}| \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $V(X_k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

• Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, $(X_iX_j)(\Omega) = \{0,1\}$. Soit $Z_{i,j}$ la variable comptant le nombre de pièces présentes à la fin dans l'urne i ou l'urne j.

On a $Z_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{n}\right)$ et $P(X_iX_j = 1) = P(X_i = 1 \cap X_j = 1) = P(Z_{i,j} = 0) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

Par suite, $X_iX_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right)$ et on a donc $E(X_iX_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

Par suite, (X_i, X_j) admet une covariance et $\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$.

$Y = \dfrac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$ admet une variance comme combinaison linéaire de variables admettant une variance et

$$\begin{aligned}
V(Y) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^n V(X_k) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} \mathrm{cov}(X_i,X_j)\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) + n(n-1)\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{=e^{-1}+o(1)}\underbrace{\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}_{=1-e^{-1}+o(1)} + \frac{n-1}{n}\left(\exp\left(n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right) - \exp\left(2n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \frac{e^{-1}(1-e^{-1})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}\left(\exp\left(n\left(-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - \exp\left(2n\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)\\
&= \frac{e^{-1}(1-e^{-1})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}\left(\left(\exp\left(-2-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - \exp\left(-2-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \frac{e^{-1}(1-e^{-1})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}\exp(-2)\left(\left(\exp\left(-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - \exp\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \frac{e^{-1}(1-e^{-1})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}\exp(-2)\left(1-\frac{2}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{e^{-1}(1-e^{-1})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right)\exp(-2)\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{e^{-1}(1-e^{-1})}{n} - \frac{\exp(-2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{e^{-1}(1-e^{-1})-e^{-2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{e^{-1}(1-e^{-1})-e^{-2}}{n}.
\end{aligned}$$

• Comme Y admet une espérance et une variance, on a, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall\varepsilon>0,\quad 0\leq P(|Y-E(Y)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(Y)}{\varepsilon^2},$$

donc, comme $\dfrac{V(Y)}{\varepsilon^2}\sim\dfrac{e^{-1}(1-e^{-1})-e^{-2}}{n\varepsilon^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}P(|Y-e^{-1}|\geq\varepsilon)=0.}$$

Exercice n°103 Centrale 2017

On dispose de N pièces qui ont chacune la probabilité $p\in]0,1[$ de donner pile. On les lance et on ne conserve que celles qui ont donné pile. On répète l'expérience et on note X_n le nombre de pièces au début du n^{e}lancé. On pose $U_n=\begin{pmatrix}P([X_n=0])\\ \vdots\\ P([X_n=N])\end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A telle que $U_{n+1}=AU_n$. A est-elle diagonalisable ? Exprimer U_n en fonction de A et de U_0.
2. Soit $\phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_N[X])$ définie par $\phi(P)=P(pX+q)$ avec $q=1-p$. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$. ϕ est-elle diagonalisable ? En déduire A^n puis U_n.

3. Question oubliée. Quelques suggestions :
— montrer que l'événement «il existe un entier n tel que $X_n = 0$» est quasi-certain ;
— calculer l'espérance de $T = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0\}$.

Solution :

1. $\forall i \in \{0, \dots, N\}$, $P(X_{n+1} = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) P(X_n = j)$ avec $P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} & \text{si } j \geq i \end{cases}$ (loi binomiale). On a donc $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = (a_{ij})$ et $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} & \text{si } j \geq i \end{cases}$ et donc $U_n = A^n U_0$.
La matrice A est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont $1, p, p^2, \dots, p^N$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, p, \cdots, p^N\}$. Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

2. $\phi(X^j) = (pX + q)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} p^i q^{j-i} X^i$ donc la matrice associée à ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$ est A. ϕ est donc diagonalisable, et on «devine» ses vecteurs propres en observant que pour $P_k = (X-1)^k$ on a $\phi(P_k) = p^k P_k$.
Notons Q la matrice de passage de la base $(X^k)_{0 \leq k \leq N}$ vers $(P_k)_{0 \leq k \leq N}$; c'est aussi la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $P \mapsto P(X-1)$ donc Q^{-1} est la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $P \mapsto P(X+1)$, et $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & p & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^N \end{pmatrix}$ donc $A^n = QD^nQ^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & p^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{nN} \end{pmatrix}$.
On observe que pour obtenir A^n il suffit de remplacer p par p^n puisque Q ne dépend pas de p. Ainsi $A^n = (a_{ij}^{(n)})$ avec $a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \binom{j}{i} p^{ni} (1-p^n)^{j-i} & \text{si } j \geq i \end{cases}$ et $U_n = A^n U_0$ avec $U_0^T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P(X_n = i) = \binom{N}{i} p^{ni} (1-p^n)^{N-i}$ et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p^n)$.

3. Notons A_n l'événement «$X_n = 0$» et A l'événement «il existe n tel que $X_n = 0$». $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements et A en est leur réunion donc $P(A) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} (1-p^n)^N = 1$: A est quasi-certain.
On a $P(T \leq n) = P(X_n = 0) = (1-p^n)^N$ donc $P(T \geq n+1) = 1 - P(T \leq n) = 1 - (1-p^n)^N$ et

$$E(T) = \sum_{n \geq 0} P(T \geq n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - (1-p^n)^N\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} (-1)^{k-1} p^{nk} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{1-p^k}$$

Pour $N = 1$ on retrouve l'espérance d'une loi géométrique de rapport $q = 1-p$, ce qui est attendu.

Thème : Divers

Exercice n°104 RMS Mines PC 2017

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(1-x) = f(1+x)$$

Solution :

On peut faire un changement de variable : si on pose $y = 1+x$, alors $1-x = 2-y$ la propriété cherchée est équivalente à

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(2-y) = f(y)$$

On appellera de nouveau x la variable. On procède par condition nécessaire, puis on cherche parmi les solutions trouvées celles qui conviennent.

1. Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(2-x) = f(x) \quad (*)$, alors

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(2-x)$$

   et en dérivant cette relation, on obtient

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f'(2-x) = -f(2-(2-x)) = f(x)$$

   Donc f est de la forme $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$.
   Remarque : on peut se contenter dans l'énoncé de demander de chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car si f vérifie (*), alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. On cherche donc les solutions parmi les fonctions de cette forme. Soit $f : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x$, donc

   $$\begin{aligned} f(x) - f'(2-x) &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \lambda \sin(2-x) - \mu \cos(2-x) \\ &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \lambda[\sin 2 \cos x - \cos 2 \sin x] - \mu[\cos 2 \cos x + \sin 2 \sin x] \\ &= [\lambda(1+\sin 2) - \mu \cos 2] \cos x + [-\lambda \cos 2 + \mu(1-\sin 2)] \sin x \end{aligned}$$

   Les fonctions cosinus et sinus étant linéairement indépendantes (résultat classique vu en Sup), f vérifie $(*)$ si et seulement si

   $$\begin{cases} \lambda(1+\sin 2) - \mu \cos 2 = 0 \\ -\lambda \cos 2 + \mu(1-\sin 2) = 0 \end{cases}$$

   Le déterminant de ce système linéaire vaut

   $$\begin{vmatrix} 1+\sin 2 & -\cos 2 \\ -\cos 2 & 1-\sin 2 \end{vmatrix} = 1 - \sin^2 2 - \cos^2 2 = 0$$

   donc les solutions de ce système sont de la forme $\lambda = \dfrac{\cos 2}{1+\sin 2}\,\mu$.
   Ainsi les solutions du problème sont les fonctions

   $$f : x \mapsto \frac{\mu}{1+\sin 2}\,(\cos 2 \cos x + (1+\sin 2) \sin x)$$

   ou encore

   $$f : x \mapsto \alpha\,(\cos(2-x) + \sin x)\,, \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice n°105 centrale 17-rms 880

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et vérifiant $(E)\ :\ P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

1. Montrer que P est unitaire.

2. Montrer que l'ensemble des racines de P est stable par $z \mapsto z^2$.
3. Montrer que si λ est une racine non nulle de P, alors $|\lambda| = 1$.
4. Montrer que $\{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| = |z-1| = 1\}$ est constitué de deux points à expliciter.
5. Trouver tous les polynômes non nuls complexes vérifiant (E).

Solution :

1. Puisque $P \neq 0$, il est de degré $n \in \mathbb{N}$ et on peut considérer son coefficient dominant $c \in \mathbb{C}^*$.
   Le coefficient de X^{2n} est c dans $P(X^2)$ et c^2 dans $P(X)P(X+1)$. On a donc $c = c^2$ et comme $c \neq 0, \quad c = 1$.
   Le seul polynôme constant vériafiant (E) est le polynôme 1.
2. On note dans cette question et les suivantes, R, l'ensemble des racines de P . R est un ensemble fini, de cardinal au plus $n = \deg(P)$.
   De plus si P est non constant, $R \neq \emptyset$.
   Si $\alpha \in R, \quad P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$ donc $\alpha^2 \in R$
3. Si λ est une racine non nulle de P. Par récurrence immédiate , d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}, \quad \lambda^{2^k} \in R$.
   Comme R est fini, il existe deux entiers k et h tels que $h < k$ et $\lambda^{2^k} = \lambda^{2^h}$.
   Comme $\lambda \neq 0, \quad \lambda^p = 1$ où $p = 2^k - 2^h \in \mathbb{N}^*$. .On a donc $|\lambda| = 1$.
4. Graphiquement ou en cherchant les solutions sous la forme $z = x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a facilement :
   $$\{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| = |z-1| = 1\} = \left\{\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}},\, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \,\right\}$$
5. Supposons que P vérifie (E) et que $P \neq 0$ et $P \neq 1$ ou encore que $\deg(P) \geq 1$.
   Si α est une racine de P telle que $\alpha \neq 1$, $(\alpha-1)^2$ est une racine non nulle de P donc de module 1 donc $|\alpha - 1| = 1$
   Finalement si $\alpha \in R$ avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1, \quad |\alpha| = |\alpha - 1| = 1$ donc $\alpha \in \left\{\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}},\, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \,\right\}$.
   Or α^2 est aussi une racine de P. Comme $\mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{-2i\frac{\pi}{3}}$ n'appartiennent pas à $\left\{\, 0,\, 1,\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}},\, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \,\right\}$, ce ne sont pas des racines de P et finalement, $R \subset \{\, 0,\, 1\}$.
   Comme P est unitaire, scindé sur $\mathbb{C}$ puisque deg(P) ≥ 1, il est de la forme $P(X) = X^p(X-1)^q$, où $p, q \in \mathbb{N}$. (et même $p + q \in \mathbb{N}^*$.)
   Remarquons que $1 = X^0(X-1)^0$.
   Réciproquement soit $P(X) = X^p(X-1)^q$. où $p, q \in \mathbb{N}$.
   $P(X^2) = P(X)P(X+1) \Leftrightarrow X^{2p}\,(X-1)^q\,(X+1)^q = X^{p+q}\,(X-1)^q\,(X+1)^p \Leftrightarrow p = q$.
   L'ensemble des polynômes complexes non nuls vérifiant (E) est $\{\, X^p(X-1)^p\,;p \in \mathbb{N}\,\}$.

Exercice n°106

Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $P + r$ ne soit pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Solution :

$P = X^4$ convient.
En effet, si $r > 0$, alors $X^4 + r$ n'a pas de racines réelles donc n'est pas scindé.
Si $r = 0$, P n'est pas à racines simples.
Et si $r < 0$ alors r peut s'écrire $-s^2$ avec $s > 0$ et $X^4 - s^2 = (X^2 - s)(X^2 + s)$ et $X^2 + s$ n'est pas scindé, donc $P + r$ ne l'est pas non plus.

Exercice n°107 Mines-Pont PSI 2013

Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimum tel que le reste dans la division euclidienne par X^2+X+1 soit $X-\dfrac{1}{2}$ et que le reste dans la division euclidienne par X^2-X+1 soit $-X+2$.

Solution :

Notons les hypothèses données sous forme de congruence, plus efficace :
$P(X) \equiv X - \dfrac{1}{2}\ [X^2+X+1]$ et $P(X) \equiv -X+2\ [X^2-X+1]$ et en changeant X en $-X$:
$P(-X) \equiv -X - \dfrac{1}{2}\ [X^2-X+1]$ et $P(-X) \equiv X+2\ [X^2+X+1]$ et en ajoutant les relations

$$\frac{1}{2}(P(X)+P(-X)) \equiv X + \frac{3}{4}\ [X^2-X+1] \text{ et } \frac{1}{2}(P(X)-P(-X)) \equiv -\frac{5}{4}\ [X^2-X+1]$$

Ces deux quantités désignent la partie paire et la partie impaire du polynôme P, c'est à dire les puissances paires et les puissances impaires de P. On a :

$$1 \equiv 1\ [X^2+X+1] \text{ et } X^2 \equiv -X-1\ [X^2+X+1]$$

Ce qui implique

$$-X^2 - \frac{1}{4} \equiv -(-X-1) - \frac{1}{4} \equiv X + \frac{3}{4}\ [X^2+X+1]$$

Et $-X^2-\dfrac{1}{4}$ est aussi le plus petit polynôme pair vérifiant cette congruence, puis que le degré 0 est impossible.
De même, on prouve que $-\dfrac{5}{4}X^3$ est le plus petit polynôme impair vérifiant l'autre congruence (degré 1 étant impossible) :

$$X \equiv X\ [X^2+X+1] \text{ et } X^3 = (X-1)(X^2+X+1)+1 \equiv 1\ [X^2+X+1]$$

Ce qui implique

$$-\frac{5}{4}X^3 + 0X \equiv -\frac{5}{4}\ [X^2+X+1]$$

Réciproquement, par construction $P(X) = -\dfrac{5}{4}X^3 - X^2 - \dfrac{1}{4}$ est le polynôme de plus petit degré vérifiant :

$$P(X) \equiv -\frac{5}{4} + (X + \frac{3}{4}) \equiv X - \frac{1}{2}\ [X^2+X+1]$$

Pour l'autre congruence, on a aisément :

$$P(X) = -\frac{1}{4}(5X^3+4X^2-1) = -\frac{1}{4}(5X+9)(X^2-X+1) + 2 - X$$

Exercice n°108 ODLT - planche 107 - Mines Ponts 2017 - exo 3

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Représenter l'ensemble des α tels que M admet au moins une valeur propre de module 1.

Solution :

1. • $\chi_M(X) = \det\begin{pmatrix} X & -1 & -\alpha \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{pmatrix} = X\begin{vmatrix} X & 0 \\ -1 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -\alpha \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^3 - X - \alpha.$

   • Si χ_M n'a que des racines simples, M est diagonalisable.
   Si a est une racine au moins double de χ_M, alors

$$\chi_M(a) = \chi'_M(a) = 0.$$

   Or, $\chi'_M(X) = 3X^2 - 1$ a pour racines $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   Les seules racines (au moins) double possibles de χ_M sont donc $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Par suite, si

$$\chi_M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq 0 \text{ et } \chi_M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pm\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

   alors M est diagonalisable.
   • Si $\alpha = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, alors $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ est une racine au moins double.
   Comme χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$, la troisième racine est $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ car $\operatorname{tr}(M) = 0$.
   Enfin, en calculant, on trouve

$$E_{-1/\sqrt{3}}(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

   qui est de dimension 1 alors que $-1/\sqrt{3}$ est une valeur propre double, donc M n'est pas diagonalisable.
   • Si $\alpha = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ est une racine au moins double.
   Comme χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$, la troisième racine est $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ car $\operatorname{tr}(M) = 0$.
   Enfin, en calculant, on trouve

$$E_{1/\sqrt{3}}(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

   qui est de dimension 1 alors que $1/\sqrt{3}$ est une valeur propre double, donc M n'est pas diagonalisable.
   • M est donc diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

2. M admet au moins une valeur propre de module 1 si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_M(e^{i\theta}) = 0$.
   Or, $\chi_M(e^{i\theta}) = e^{3i\theta} - e^{i\theta} - \alpha$, donc M admet au moins une valeur propre de module 1 si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = e^{3i\theta} - e^{i\theta}$.
   Le lieu des complexe d'affixe α est la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) - \cos(t) = -4\cos t + 4\cos^3 t \\ y(t) = \sin(3t) - \sin(t) = 2\sin t - 4\sin^3 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   x et y sont 2π-périodique, donc on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   y et y sont π-antipériodiques, donc on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ (et la courbe entière se retrouvera par symétrie centrale de centre O.
   x est paire et y est impaire, donc on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi/2]$ (et la courbe entière se retrouvera par symétrie d'axe (Ox).

x et y sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \pi/2]$ et, pour tout $t \in [0, \pi/2]$,

$$x'(t) = -3\sin(3t) + \sin(t) = 12\sin^3 t - 8\sin t = 12\underbrace{\sin t}_{\geq 0}\left(\sin t - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\underbrace{\left(\sin t + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}_{>0}$$

$$y'(t) = 3\cos(3t) - \cos(t) = 12\cos^3(t) - 10\cos(t) = 12\underbrace{\cos t}_{\geq 0}\left(\cos t - \sqrt{\frac{5}{6}}\right)\underbrace{\left(\cos t + \sqrt{\frac{5}{6}}\right)}_{>0}$$

On a donc

t	0		$\arccos(\sqrt{5/6})$		$\arcsin(\sqrt{2/3})$		1
$x'(t)$	0	-		-	0	$+$	4
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\searrow$	$-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	2	$+$	0	-		-	0

Il ne reste plus qu'à tracer la courbe avec les demi-tangentes :
— verticale vers le haut en $(0, 0)$ pour $t = 0$.
— horizontale en $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ pour $t = \arccos(\sqrt{5/6})$
— verticale en $\left(-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ pour $t = \arcsin(\sqrt{2/3})$
— horizontale vers la gauche en $(0, 0)$ pour $t = \pi/2$
et en appliquant ensuite les symétries mises en évidence au début de l'étude.