Devoir maison $n°11$ pour le vendredi 18 mai 2018

La rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.
Les résultats de chaque question doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ ou <u>soulignés</u>.

Le but de ce devoir (composé de 4 parties) est de démontrer le résultat suivant :

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
> Il existe un entier $1 \leq p \leq n$ tel que $E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$.

I. Un exemple

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?
4. Donner l'expression de $f^2 = f \circ f$.
5. Déterminer le noyau et l'image de f^2.
6. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2)$?

II. Démonstration du résultat en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $G_p = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $F_p = \mathrm{Im}(f^p)$.
   (a) Justifier que F_p et G_p sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Montrer que
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ G_p \subset G_{p+1} \text{ et } F_{p+1} \subset F_p$$
2. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $c_p = \mathrm{dim}(F_p)$ et $d_p = \mathrm{dim}(G_p)$.
   (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ c_p + d_p = n$.
   (b) Montrer que la suite $(c_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée.
   (c) Montrer que la suite $(c_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.
   (d) En déduire <u>correctement</u> que : $\exists r \in \mathbb{N},\ c_{r+1} = c_r$.
   On note p le plus petit entier vérifiant cette condition. On l'appelle <u>indice de f</u>.
   (e) Montrer que $F_{p+1} = F_p$ et $G_{p+1} = G_p$.
3. Montrer que $\forall r \in \mathbb{N},\ F_{p+r} = F_p$ et $G_{p+r} = G_p$.
4. Montrer que $E = F_p \oplus G_p$.

III. Recherche de l'indice p pour des endomorphismes particuliers

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $f = 0$, combien vaut son indice ?
2. Si f est un automorphisme de E, combien vaut son indice ?
3. Si f est un projecteur de E, combien vaut son indice ?
4. Supposons que f soit un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire :

$$\exists\, r \in \mathbb{N}^*,\ f^r = 0 \text{ et } f^{r-1} \neq 0$$

   Montrer que l'indice de f est r.

Facultatif : Recherche de l'indice p pour un endomorphisme polynômial .

Soit Δ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ par

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[\mathbf{X}] \to \mathbb{R}[\mathbf{X}] \\ P \to P(\mathbf{X}+1) - P(\mathbf{X}) \end{cases}$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.
2. Déterminer le noyau de Δ.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathbf{X}]$. En déduire $\mathrm{Im}(\Delta)$.
4. Que peut-on en déduire sur l'indice de Δ ?
5. On définit une famille de polynôme $\mathcal{F} = (P_0, ..., P_n)$ par

$$P_0 = 1,\ \ \forall k \in [1, n],\ P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(\mathbf{X} - i) = \frac{\mathbf{X}(\mathbf{X}-1)...(\mathbf{X}-k+1)}{k!}$$

   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.

   (b) Calculer $\Delta(P_0)$ puis montrer que $\forall k \in [1, n],\ \Delta(P_k) = P_{k-1}$.

   (c) En déduire une expression de $\Delta^i(P_k)$ pour $(i, k) \in \mathbb{N} \times [0, n]$.

   (d) Montrer que Δ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.

   (e) En déduire son indice.

N'hésitez pas à en parler entre vous et à me contacter par e-mail.