Produits scalaires et normes

Exercice 1: Pour chacun des espaces E et des applications ϕ proposés, dire s'il s'agit d'espaces préhilbertiens réels ou pas.

1. $E = \mathbb{R}^n$ et $\phi(x,y) = x_1y_1$.
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\phi(x,y) = x_1x_2 - y_1y_2$.
3. $E = \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ et $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ pour $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ fixés.
4. $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\phi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.

Exercice 2: *Calcul de normes*
Pour chacun des espaces E, rappeler le produit scalaire usuel $<,>$, la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ et calculer la norme de chacun des vecteurs de la base canonique $||e_i||$ ainsi que le produit scalaire entre 2 vecteurs $< e_i, e_j >$.

1. $E = \mathbb{R}^n$
2. $E = \mathbb{R}_2[\mathbf{X}]$
3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 3: Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $||.||$ la norme associée au produit scalaire. Montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \left|\left|\frac{x}{||x||^2} - \frac{y}{||y||^2}\right|\right| = \frac{||x-y||}{||x||.||y||}$$

Exercice 4: Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $f : E \to E$ telle que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) > = < x, y >$$

En revenant à la définition, montrer que f est une application linéaire de E dans E.

Cauchy-Schwarz

Exercice 5: Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in E$. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$
3. Soit $x \in E$ tel que $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Exercice 6: Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Pour $f \in E$ une fonction strictement positive sur $[a,b]$, on note
$$l(f) = \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt$$
   (a) Montrer que $\forall f \in E,\ l(f) \geq (b-a)^2$.
   (b) Proposer une fonction f pour laquelle $l(f) = (b-a)^2$.

Exercice 7: Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
Pour f continue et positive sur $[0,1]$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$. Montrer que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ I_{n+p}^2 \leq I_{2n}.I_{2p}$$

Exercice 8: Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}(A^T.A)}$$

Exercice 9: Soit $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que

$$(\mathrm{tr}(AB+BA))^2 \leq 4\mathrm{tr}(A^2).\mathrm{tr}(B^2)$$

Algorithme de Gram-Schmidt

Exercice 10: On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Orthonormaliser la famille suivante

$$u=(1,0,1),\ \ v=(1,1,1),\ w=(-1,1,0)$$

Exercice 11: On définit une application sur $\mathbb{R}[\mathbf{X}] \times \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ par

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}],\ \phi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})}Q(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})d\theta.$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$.
2. Montrer que la famille $(\mathbf{X}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 12: Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien. Soit p un projecteur de $\mathcal{L}(E)$.

1. Supposons que p soit un projecteur orthogonal. Montrer que $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. Réciproquement, supposons que $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$, $y \in \mathrm{Im}(p)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (a) Justifier que $y = p(y+\lambda.x)$ puis montrer que $\|y\|^2 \leq \|y\|^2 + 2\lambda < x,y > +\lambda^2\|x\|^2$.
   (b) En déduire que $<x,y>=0$ puis que p est un projecteur orthogonal.
3. En déduire une caractérisation des projecteurs orthogonaux.

Exercice 13: *Déterminant de Gram*
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(u_1,...,u_p) \in E^p$. On note $G(u_1,....,u_p)$ la matrice dont le coefficient en position i,j est $<u_i,u_j>$.

1. Exprimer $G(1,\mathbf{X},\mathbf{X}^2)$ pour $E = \mathbb{R}_2[\mathbf{X}]$.
2. Que pouvez-vous dire de la matrice $G(u_1,....,u_p)$? Que se passe-t-il si la famille $(u_1,...,u_p)$ est une base orthonormée ?
3. Montrer que si la famille $(u_1,...,u_p)$ est liée alors $\det(G(u_1,...,u_p)) = 0$. La réciproque est également vraie.
4. Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1,...,u_p)$ et soit $x \in E$.
   En écrivant $x = p_V(x) + p_{V^\perp}(x)$, montrer que

$$\det(G(u_1,...,u_p,x) = \|p_{V^\perp}(x)\|^2.\det(G(u_1,....,u_p))$$

5. En déduire que

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{\det(G(u_1,...,u_p,x)}{\det(G(u_1,....,u_p)}}$$